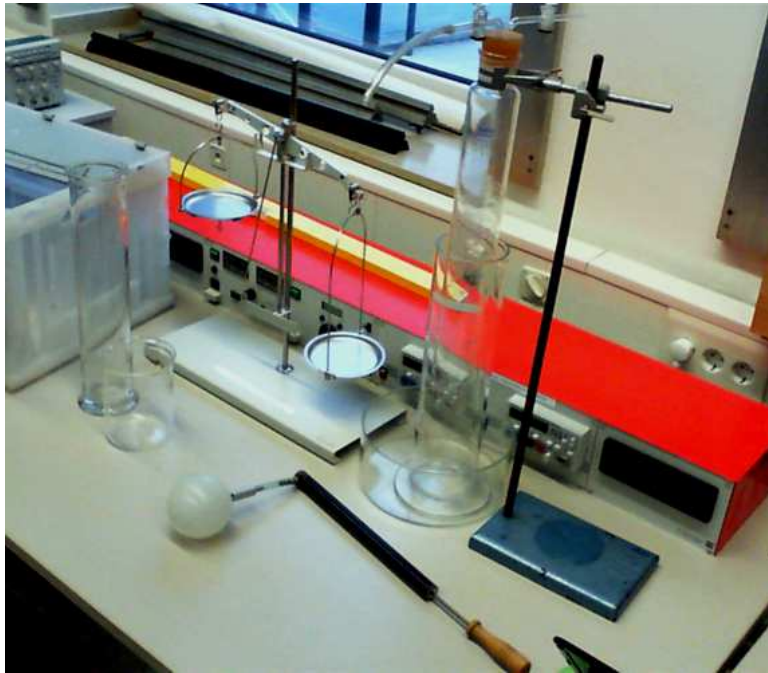


v1.1 - Dichte von Luft und Festkörper

Versuch durchgeführt am 28.03.2013 von dn und as, Version vom 18.04.2013



Contents

- Durchführung
- Abschätzung der Luftdichte anhand der Zustandsgleichung für ideale Gase
- Teil 1: Bestimmung der Dichte von Luft
- Fehlerrechnung zum Abschnitt
- Bildung des gewichteten Mittelwerts (optional)
- Teil 2: Dichtebestimmung von Festkörpern
- Festkörper Nr. 1
- Fehlerrechnung zum Abschnitt
- Festkörper Nr. 2
- Fehlerrechnung zum Festkörper Nr. 2
- Fazit
- Copyright

Durchführung

- Im ersten Teilversuch wird die Dichte ρ von Luft durch Wägung und Volumenmessung bestimmt.
- Der zweite Teilversuch beschäftigt sich mit der Dichtebestimmung von verschiedenen Festkörpern nach dem Archimedischen Prinzip.

```
% Initialisierungsoptionen für MATLAB
clear all;           % Löschen alter Variablen
close all;          % Schliessen der Fenster
clc;                % Löschen der Ausgaben im Kommandofenster
```

Abschätzung der Luftdichte anhand der Zustandsgleichung für ideale Gase

Die Zustandsgleichung für ideale Gase ist

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

p ist der herrschende Druck, V das Volumen des Gases, n die Stoffmenge in mol, R die allgemeine Gaskonstante ($R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$) und T die absolute Temperatur in Kelvin. Die Dichte eines Gases lässt sich berechnen, indem man zwei weitere Gleichungen hinzuzieht, nämlich die der Dichte als das Verhältnis von Masse m zum Volumen V

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

und die der Stoffmenge

$$n = \frac{m}{M},$$

wobei M die Molmasse des betrachteten Stoffes.

Setzt man die Ausdrücke für Dichte und Stoffmenge in die Zustandsgleichung für ideale Gase ein, so erhält man

$$pV = \frac{m}{M} \cdot RT \quad \Leftrightarrow \quad \varrho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

Nun weiss man, dass sich die Luft aus ca. 78% Stickstoff (Molmasse: 28 g/mol) und 22% Sauerstoff (Molmasse: 32 g/mol) zusammensetzt (Argon, Kohlendioxid und restliche Gase mal vernachlässigt). Die Molmasse der Luft beträgt dann

$$M_{Luft} = (0.78 \cdot 28 + 0.22 \cdot 32) \text{ g/mol} = 28.9 \text{ g/mol}$$

Daraus lässt sich die Dichte der trockenen Luft bei Normalbedingungen (NB) ausrechnen.

```
p0 = 101325;           % Druck bei NB in Pa (N/m^2)
T0 = 273.15;          % Temperatur bei NB in K
R = 8.314;            % Allgemeine Gaskonstante in J/(mol*K)
M_Luft = 0.0289;      % Mittlere Molmasse der Luft in kg/mol
rho0 = p0 * M_Luft / (R * T0); % Berechnete Dichte in kg/m^3
```

```
% Ergebnis
```

```
fprintf('Dichte der Luft bei NB: rho_Luft = %g kg/m^3 \n', rho0);
```

Dichte der Luft bei NB: $\rho_{\text{Luft}} = 1.28945 \text{ kg/m}^3$

Die Umrechnung der Dichte auf die Normalbedingungen erfolgt mit der Formel

$$\rho_0 = \rho \cdot \frac{p_0 \cdot T}{p \cdot T_0}$$

ρ : gemessene Dichte in kg/m^3 , T : Raumtemperatur, p : herrschender Luftdruck in Pascal.

Teil 1: Bestimmung der Dichte von Luft

Man pumpt einige Male Luft in den Luftgewichtsmesser und bestimme die Masse der eingepumpten Luft. Anschliessend wird die Gasmenge in einen Gasometer eingeleitet, durch welchen sich das eingefüllte Volumen in ml bestimmen lässt.

```
p = 99260; % Herrschender Luftdruck in Pa
dp = 10; % Messunsicherheit bei der Luftdruckmessung
T = 22.5 + 273.15; % Raumtemperatur in K
dT = 0.5; % Messunsicherheit bei der Temperaturmessung

% Messwerte
m_gasometer = 77.730e-3; % Masse des leeren Gasometers in kg (Tara)
m_ges1 = 77.873e-3; % Gesamtmasse Gasometer + eingepumpte Luft
m_ges2 = 77.848e-3;
m_ges3 = 78.014e-3;
dm = 2 * 5e-5; % Messunsicherheit der Wägung
% (es wurde jeweils zweimal gewogen)

m1 = m_ges1 - m_gasometer; % Masse der gewogenen Luft (abzüglich Tara)
m2 = m_ges2 - m_gasometer;
m3 = m_ges3 - m_gasometer;

V1 = 105e-6; % Eingefülltes Volumen im Gasometer in ml
V2 = 80e-6; % umgerechnet in m^3
V3 = 220e-6;
dV = 5e-6; % Messunsicherheit beim Ablesen +/- 5ml
% umgerechnet in m^3

% Umrechnung auf Normalbedingungen
rho1 = (m1/V1) * (p0*T)/(p*T0);
rho2 = (m2/V2) * (p0*T)/(p*T0);
rho3 = (m3/V3) * (p0*T)/(p*T0);
```

Fehlerrechnung zum Abschnitt

Partielle Ableitungen werden benötigt, die Gleichung hierzu ist

$$\rho_0 = \frac{m}{V} \cdot \frac{p_0 \cdot T}{p \cdot T_0}$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho_0}{\partial m} &= \frac{T p_0}{T_0 V p} \\ \frac{\partial \varrho_0}{\partial V} &= -\frac{T m p_0}{T_0 V^2 p} \\ \frac{\partial \varrho_0}{\partial T} &= \frac{m p_0}{T_0 V p} \\ \frac{\partial \varrho_0}{\partial p} &= -\frac{T m p_0}{T_0 V p^2}\end{aligned}$$

Die Gesamtunsicherheit $\Delta \varrho$ ist dann die Summe aus den Beträgen der partiellen Ableitungen multipliziert mit den jeweiligen Messunsicherheiten, nach denen die obige Gleichung abgeleitet wurde.

$$\Delta \varrho = \left| \frac{\partial \varrho_0}{\partial m} \right| \cdot \Delta m + \dots + \left| \frac{\partial \varrho_0}{\partial V} \right| \cdot \Delta V$$

Die Gleichung wird nicht nach p_0 und nach T_0 abgeleitet, da es sich um Konstanten handelt.

```
drho1 = abs((T*p0)/(T0*V1*p)) * dm ...
+ abs(-(T*m1*p0)/(T0*V1^2*p)) * dV ...
+ abs((m1*p0)/(T0*V1*p)) * dT ...
+ abs(-(T*m1*p0)/(T0*V1*p^2)) * dp;

drho2 = abs((T*p0)/(T0*V2*p)) * dm ...
+ abs(-(T*m2*p0)/(T0*V2^2*p)) * dV ...
+ abs((m2*p0)/(T0*V2*p)) * dT ...
+ abs(-(T*m2*p0)/(T0*V2*p^2)) * dp;

drho3 = abs((T*p0)/(T0*V3*p)) * dm ...
+ abs(-(T*m3*p0)/(T0*V3^2*p)) * dV ...
+ abs((m3*p0)/(T0*V3*p)) * dT ...
+ abs(-(T*m3*p0)/(T0*V3*p^2)) * dp;

% Ergebnisse (ungerundet)
fprintf('Ergebnis Messung 1: rho1 = (%g +/- %g) kg/m^3 \n', rho1, drho1);
fprintf('Ergebnis Messung 2: rho2 = (%g +/- %g) kg/m^3 \n', rho2, drho2);
fprintf('Ergebnis Messung 3: rho3 = (%g +/- %g) kg/m^3 \n', rho3, drho3);

Ergebnis Messung 1: rho1 = (1.50475 +/- 1.12663) kg/m^3
Ergebnis Messung 2: rho2 = (1.62971 +/- 1.48589) kg/m^3
Ergebnis Messung 3: rho3 = (1.42631 +/- 0.537195) kg/m^3
```

Die gemessenen Dichten von Luft haben eine relativ hohe Abweichungen zum theoretisch berechneten Wert von $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$. Das Messergebnis ist nicht ganz zufriedenstellend. Es handelt sich vermutlich um einen Fehler bei der Durchführung (eventuell ist die Luft beim Wiegen entwichen, undichte Stellen im Aufbau usw.)

Bildung des gewichteten Mittelwerts (optional)

Man hat nun drei unterschiedliche Messwerte mit drei unterschiedlichen Messunsicherheiten. Diese möchte man nun zusammenfassen zu einem Messergebnis. Dazu bildet man das sogenannte gewichtete Mittel. Diese Rechnung ist nicht immer erforderlich, aber hierbei mal als Beispiel angeführt.

Der gewichtete Mittelwert x_{Best} wird nach der folgenden Gleichung berechnet

$$x_{Best} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

mit

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Dabei ist \bar{x}_i der i -te Mittelwert (z.B. aus einer anderen Messung) und σ_i dessen Fehler. Der Kehrwert des Fehlers zum Quadrat ergibt den sogenannten Wichtungsfaktor w_i .

Den praktischen Nutzen dieses Wichtungsfaktors kann man sich sehr einfach vorstellen: Ist der Messfehler sehr klein, so wird er quadriert noch kleiner. Kleine Zahlen im Nenner führen dazu, dass der Bruch sehr gross wird. Also wird der Mittelwert mit einem kleinen Fehler stärker gewichtet als ein Mittelwert mit einem grösseren Fehler bzw. grösserer Unsicherheit.

Der Fehler des gewichteten Mittelwerts ist dann

$$\sigma_{Best} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}$$

```
% Wichtungsfaktoren
w1 = 1/drho1^2;    w2 = 1/drho2^2;    w3 = 1/drho3^2;

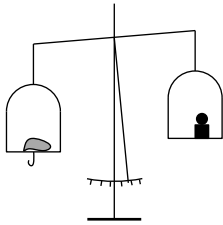
% Gewichteter Mittelwert
rho = (w1*rho1 + w2*rho2 + w3*rho3)/(w1+w2+w3);

% Unsicherheit des gewichteten Mittelwerts
drho = sqrt((w1^2*drho1^2 + w2^2*drho2^2 + w3^2*drho3^2)/(w1 + w2 + w3)^2);

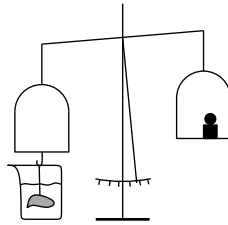
% Ergebnis
fprintf('Endergebnis der Dichtemessung: rho = (%g +/- %g) kg/m^3 \n',rho,drho);

Endergebnis der Dichtemessung: rho = (1.45902 +/- 0.374271) kg/m^3
```

Teil 2: Dichtebestimmung von Festkörpern



Wiegen an der Luft



Wiegen in der Flüssigkeit

Es werden zwei unterschiedliche, wasserunlösliche Festkörper zunächst an der Luft, anschliessend in Wasser mittels einer Balkenwaage gewogen. Hierzu stehen unterschiedliche Gewichte (50g, 20g, 20g, 10g, 5g, 2g, 2g, 1g, 0.5g, usw.) zur Verfügung. Die Berechnung der Dichte erfolgt mit der folgenden Formel (ohne Herleitung):

$$\rho_K = \frac{m_K^L}{m_K^L - m_K^{Fl}} \cdot \rho_{Fl}$$

m_K^L : Masse des Körpers an der Luft m_K^{Fl} : Masse des Festkörpers in der Flüssigkeit ρ_{Fl} : Dichte der Flüssigkeit (hier: Wasser) ρ_K : Dichte des Festkörpers

Festkörper Nr. 1



Das Aussehen der Probe kann schon ein Indiz dafür sein, mit welchem Stoff man es zu tun hat. Diese Probe war auf jeden Fall vom Aussehen her metallisch, matt glänzend und hatte einen leicht bräunlichen Ton. Es könnte sich dabei um Messing handeln (eine Legierung aus Kupfer und Zink) aber auch andere Metalle kommen in Frage.

$\rho_{Fl} = 0.9978;$

% Dichte von Wasser bei 22 degC

```

m_L1 = 0.09542;           % Masse des Körpers an der Luft in kg
dm_L1 = 2*5e-5;          % Messunsicherheit +/- 0.05g
m_Fl1 = 0.08209;         % Masse des Körpers in der Flüssigkeit
dm_Fl1 = 2*5e-5;         % Messunsicherheit

rho_K1 = rho_Fl * m_L1 / (m_L1 - m_Fl1);    % Berechnete Dichte

```

Fehlerrechnung zum Abschnitt

Partielle Ableitungen der Gleichung für die Berechnung der Dichte des Körpers

$$\rho_K = \frac{m_K^L}{m_K^L - m_K^{Fl}} \cdot \rho_{Fl}$$

sind:

$$\frac{\partial \rho_K}{\partial m_K^L} = -\frac{\rho_{Fl}}{m_{Fl} - m_L} - \frac{m_L \rho_{Fl}}{(m_{Fl} - m_L)^2}$$

$$\frac{\partial \rho_K}{\partial m_K^{Fl}} = \frac{m_L \rho_{Fl}}{(m_{Fl} - m_L)^2}$$

Die Gesamtunsicherheit ist dann

$$\Delta \rho_K = \left| \frac{\partial \rho_K}{\partial m_K^L} \right| \cdot \Delta m_K^L + \left| \frac{\partial \rho_K}{\partial m_K^{Fl}} \right| \cdot \Delta m_K^{Fl}$$

```

drho_K1 = abs(- rho_Fl / (m_Fl1 - m_L1) - ...
(m_L1*rho_Fl) / (m_Fl1 - m_L1)^2) * dm_L1 + ...
abs((m_L1*rho_Fl) / (m_Fl1 - m_L1)^2) * dm_Fl1;

```

% Ergebnis

```

fprintf('Dichte des Festkörpers Nr. 1: rho_K1 = (%g +/- %g) kg/m^3 \n', rho_K1, drho_K1);

```

```

Dichte des Festkörpers Nr. 1: rho_K1 = (7.14254 +/- 0.0996795) kg/m^3

```

Festkörper Nr. 2



Diese Probe ist silbern glänzend und man sieht an den Bruchstellen eine Kristallstruktur. Die Leitfähigkeit wurde leider nicht überprüft.

```
m_L2 = 0.04521;           % Masse des Körpers an der Luft in kg
dm_L2 = 2 * 5e-5;        % Messunsicherheit +/- 0.05g (2x gewogen)
m_F12 = 0.03844;        % Masse des Körpers in der Flüssigkeit
dm_F12 = 2*5e-5;        % Messunsicherheit
```

```
rho_K2 = rho_F1 * m_L2 / (m_L2 - m_F12);    % Berechnete Dichte
```

Fehlerrechnung zum Festkörper Nr. 2

Hier erfolgt die Fehlerrechnung analog zum Festkörper Nr. 1

```
drho_K2 = abs(- rho_F1 / (m_F12 - m_L2) - ...
    (m_L2 * rho_F1) / (m_F12 - m_L2)^2 * dm_L2 + ...
    abs((m_L2 * rho_F1) / (m_F12 - m_L2)^2 * dm_F12);
```

```
% Ergebnis
```

```
fprintf('Dichte des Festkörpers Nr. 2: rho_K2 = (%g +/- %g) kg/m^3 \n', rho_K2, drho_K2);
```

```
Dichte des Festkörpers Nr. 2: rho_K2 = (6.6633 +/- 0.182109) kg/m^3
```

Fazit

Bei der Bestimmung der Dichte der Luft liegt der Bestwert über dem Literaturwert, jedoch im Rahmen der angegebenen Messunsicherheit. Die Ursachen für die Relative Abweichung von 13% gegenüber der berechneten Dichte könnten z.B. Lecks oder Gasverluste bei der Handhabung des Gasometers bzw. Luftgewichtsmessers

(insbesondere *nach* dem Wiegen) sein. Da das Gasvolumen mit $1/V$ in die Dichte eingeht, führt eine Verminderung des Volumens zu einer scheinbaren Erhöhung der Gasdichte. Ebenso wurde keine Barometerkorrektur angewandt, denn die Dichte ist ebenfalls proportional zu $1/p$.

Im zweiten Teil des Versuches konnte die Dichte zweier Festkörper bestimmt werden. Bei der ersten Probe handelt sich um Zink (Dichte 7.133g/cm^3 bei $25\text{ }^\circ\text{C}$). Messing kommt mit einer Dichte von ca. 8.9g/cm^3 nicht in Frage. Die Dichte und das Aussehen der zweiten Probe passt zum Element Antimon (Dichte 6.691g/cm^3 bei $20\text{ }^\circ\text{C}$) [HoCP]. Beide Ergebnisse stimmen im Rahmen der Unsicherheiten mit dem Literaturwert überein.

Copyright

Dieses Werk bzw. Inhalt steht unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland Lizenz.

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>

