v1.2 - Elastische Konstanten

Versuch durchgeführt am 28.03.2013 von dn und as, Version vom 14.04.2013

Contents

Durchführung

- Im ersten Teil wird die Federkonstante D einer Schraubenfeder anhand der statischen Methode bestimmt. Im Anschluss wird die Federkonstante D und die effektive Federmasse $m_{F,eff.}$ anhand der dynamischen Methode ermittelt.
- Im zweiten Teilversuch soll der Schubmodul eines Drahtes (statisch/dynamisch) bestimmt werden.

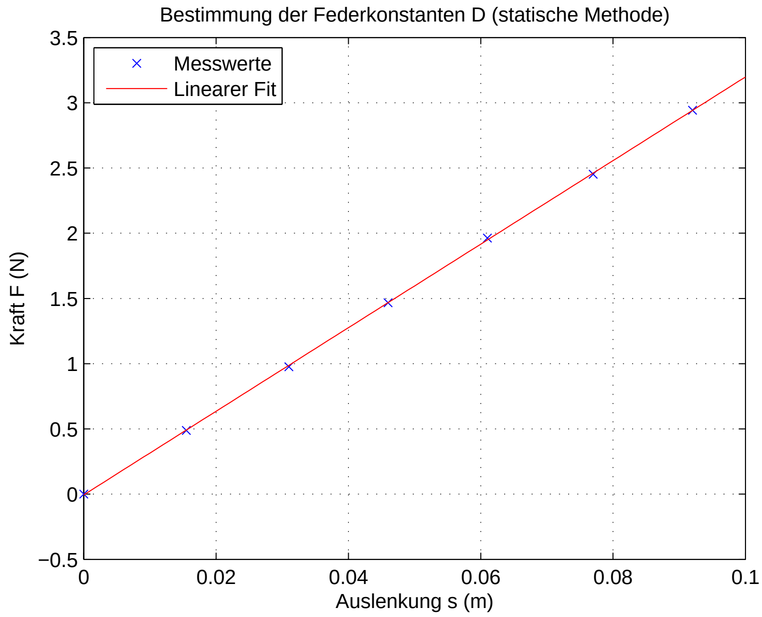
```
% Initialisierungsoptionen für MATLAB
clear all;                      % Löschen alter Variablen
close all;                      % Schliessen der Fenster
clc;                            % Löschen der Ausgaben im Kommandofenster
```

Teil 1: Bestimmung der Federkonstanten einer Schraubenfeder (statische Methode)

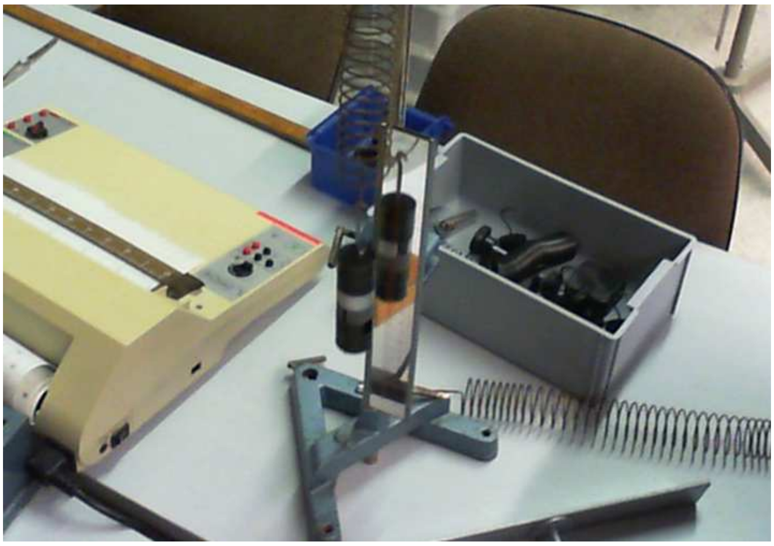
Die Feder wird senkrecht auf einem Stativ vor einer Spiegelskala aufgehängt. Man sucht sich ein paar Gewichte der Massen m zusammen und hängt diese an die Feder. Die Auslenkung der Feder wird notiert, anschliessend trägt man die Kraft $F = m \cdot g$ gegen die Auslenkung s in einem $F - s$-Diagramm auf. Aus der Steigung der Ausgleichsgeraden der Form $y = A \cdot x + B$ lässt sich die Federkonstante D bestimmen.

```
% Messwerte
s = [0 0.0155 0.0310 0.046 0.0610 0.077 0.092];        % Auslenkungen in m
m = [0 0.04984 0.09954 0.14959 0.20002 0.24998 0.300]; % Masse der Gewichte

g = 9.81;                         % Erdbeschleunigung in m/s^2
F = m*g;                          % Umrechnung der Massen in eine Kraft

[A dA B dB] = niehuus(s,F);       % Lineare Regression nach [Niehuus2005]
x = 0:0.001:0.1;                  % Generieren einiger x-Werte
y = A.*x + B;                     % Generieren der Geraden y = Ax + B

t95 = 2.45;                       % Faktor für die stat. Sicherheit von 95%
dA = t95*dA; dB = t95*dB;         % für n = 7 Messwerte (siehe Skript)

% Plotten der Messwerte/Fitgeraden
figure
plot(s,F,'bx',x,y,'r-');          % Plot-Kommando für den x-y-Grafen
grid on;                          % Gitternetz an
title('Bestimmung der Federkonstanten D (statische Methode)');
xlabel('Auslenkung s (m)');
ylabel('Kraft F (N)');
legend('Messwerte','Linearer Fit','Location','NorthWest');

% Ergebnis (ungerundet)
txt = 'Geradengleichung: \n F(s) = (%g +/- %g)N/m * s + (%g +/- %g)N \n';
fprintf(txt,A,dA,B,dB);
fprintf('Ergebnis Federkonstante (stat): D = (%g +/- %g)N/m \n',A,dA);

% Freigabe der Variablen für weitere Berechnungen
clear t95 x y A dA B dB F dF txt
```

```
Geradengleichung:
 F(s) = (32.0296 +/- 0.277572)N/m * s + (-0.00559444 +/- 0.0153586)N
Ergebnis Federkonstante (stat): D = (32.0296 +/- 0.277572)N/m
```



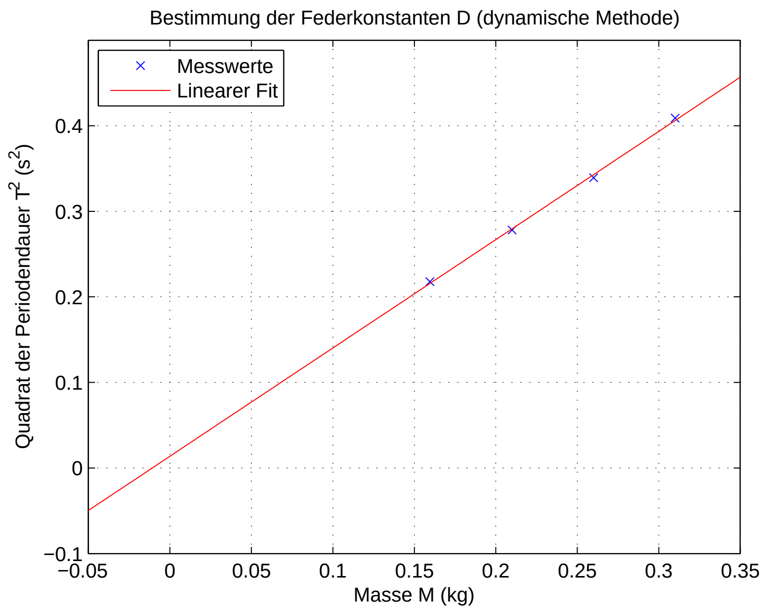
Bestimmung der Federkonstanten (dynamische Methode)



Es werden Gewichte mit unterschiedlichen Massen M an das Ende der Feder gehängt und nach einer kleinen Auslenkung der Feder 20 Perioden gemessen. Aus der grafischen Auftragung von T^2 gegen die Masse m liefert die Steigung der Geraden die Federkonstante D und der Achsenabschnitt die effektive Federmasse.

```
M = [0.15960 0.21003 0.25999 0.31000];  % Massen der Gewichte in kg
T = [0.4667 0.5275 0.5825 0.6395];      % Dauer einer Periode in sec
m_F = 0.01584;                      % Masse der Feder in kg
dm_F = 1e-4;                        % Messunsicherheit der Federmasse
```

```
T = T.^2;                       % Quadieren der Perioden T -> T^2
[A dA B dB] = niehuus(M,T);     % Lineare Regression

t95 = 3.18;                     % Faktor für stat. Sicherheit von 95%
dA = t95*dA;                    % für n = 4 Messwerte (entnommen aus
dB = t95*dB;                    % Fehlerrechnungsskript S.3)

x = -0.1:0.005:0.35;            % Generieren einiger x-Werte
y = A.*x + B;                   % Generieren der Geraden für y = Ax + B

figure                          % Plotten der Messwerte
plot(M,T,'bx',x,y,'r-');
grid on;
title('Bestimmung der Federkonstanten D (dynamische Methode)');
xlabel('Masse M (kg)');
ylabel('Quadrat der Periodendauer T^2 (s^2)');
legend('Messwerte','Linearer Fit','Location','NorthWest');
set(gca,'XLim',[-0.05 0.35],'YLim',[-0.1 0.5]); % Achsenskalierung
```



Nachdem man die Ergebnisse der linearen Regression hat (Steigung A und Achsenabschnitt B) können die Federkonstante D und die effektive Federmasse $m_{F,eff}$ berechnet werden. Der Zusammenhang ist nämlich folgender:

- Geradengleichung: $y = A \cdot x + B$
- Schwingungsgleichung: $T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot (m + m_{eff})$

Daraus folgt

$$\underbrace{T^2}_{y} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{D}}_{A} \cdot \underbrace{m}_{x} + \underbrace{\frac{4\pi^2}{D} \cdot m_{eff}}_{B}$$

```
D = 4*pi^2/A;                    % Berechnung der Federkonstanten
dD = abs(-8*pi/A^2) * dA;        % Messunsicherheit von D
```

Zur Berechnung der effektiven Federmasse wird der Schnittpunkt mit der x-Achse benötigt. Dazu wird die Geradengleichung $Ax + B = 0$ nach x aufgelöst. Alternativ lässt sich der Ausdruck

$$\frac{4\pi^2}{D} \cdot m_{F,eff} = B$$

nach $m_{F,eff}$ auflösen. Man erhält also den Betrag (negative Massen gibt es nicht)

```
m_eff = B/A;
dm_eff = (dB/B - dA/A) * m_eff; % Bei Division zweier Unsicherheiten werden
                                % die relativen Fehler voneinander
                                % subtrahiert

% Ergebnisse (ungerundet)
txt = 'Geradengleichung: T^2(M) = (%g +/- %g)s^2/kg * M + (%g +/- %g)s^2 \n';
fprintf(txt,A,dA,B,dB);
fprintf('Ergebnis Federkonstante (dyn.): D = (%g +/- %g)N/m \n',D,dD);
fprintf('Ergebnis eff. Federmasse: m_eff = (%g +/- %g)kg \n',m_eff,dm_eff);

% Freigabe der Variablen für weitere Berechnungen
clear t95 x y A dA B dB F dF m_eff dm_eff txt D dD
```

```
Geradengleichung: T^2(M) = (1.266 +/- 0.103108)s^2/kg * M + (0.0136921 +/- 0.0249001)s^2
Ergebnis Federkonstante (dyn.): D = (31.1835 +/- 1.61682)N/m
Ergebnis eff. Federmasse: m_eff = (0.0108152 +/- 0.0187874)kg
```

Damit ist der erste Teil des Versuches beendet. Im zweiten Teil soll der Schubmodul eines Drahtes jeweils statisch und dynamisch ermittelt werden.

Teil 2: Bestimmung des Schubmoduls G_{stat} (statische Methode)

Der einseitig eingespannte Draht wird an einem Fadenhalter verdrillt. Anhand der Auslenkung kann der Schubmodul G berechnet werden. Für die Berechnung von G wird muss vorher der Radius r des Drahtes präzise bestimmt werden. Dazu muss man ca. 10 Messungen an verschiedenen Stellen durchführen, da der Radius des Drahtes proportional zu $\frac{1}{r^4}$ in die Berechnung von G eingeht!

```
% Messwerte (Hier wird der Durchmesser in m angegeben)
d_mess = [2.486 2.482 2.481 2.481 2.472 ...
    2.479 2.476 2.488 2.488 2.485]*10^-3;
r_mess = d_mess/2;               % Umrechnung Durchmesser -> Radius
r = mean(r_mess);                % Mittelwert von r
t95 = 2.26;                      % Faktor für stat. Sicherheit von 95%
dr = t95 * std(r_mess)/(sqrt(length(r_mess)));     % Standardabweichung
```

Der Radius des Fadenhalters R wird ebenfalls mit dem Messschieber bestimmt. Allerdings haben wir hier nicht so sorgfältig gemessen und müssen uns nur mit einem Messwert begnügen.

```
% Radius R des Fadenhalters
R = 4.98e-3;                    % Radius in m
dR = 1e-5;                      % Messunsicherheit in m
```

Für die weitere Berechnung von G_{stat} benötigt man noch die Länge des Drahtes l (von der Einspannung bis zur Schraube des Fadenhalters), den Abstand von der Aufhängung bis zum Spiegel l^*, den Abstand b vom Spiegel bis zum Lineal (befindet sich an der Lampe) und die Kraft F, welche vom Verdrillungswinkel α abhängig ist.

```
l_stern = 0.351;    dl_stern = 1e-3;    % Abstand Aufhängung-Spiegel
l = 0.565;          dl = 1e-3;          % Abstand Aufhängung-Fadenhalter
b = 0.537;          db = 2e-3;          % Abstand Spiegel-Lineal (Lampe)

% Messwerte: Auslenkungen a in m, Kräfte F in Newton
a = [0.018 0.034 0.049 0.065 0.078 0.096 0.112 0.132 0.152];

% Gemessene y-Werte (für das x-y-Diagramm)
F = [1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0];
```

Der Schubmodul wird gemäss Gleichung

$$G_{stat} = \frac{4 \cdot l \cdot R \cdot F}{\pi \cdot r^4 \cdot \alpha}$$

berechnet. Der Winkel α wird indirekt durch die Abstände a und b bestimmt, denn es gilt

$$\alpha = \frac{l}{l^*} \cdot \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

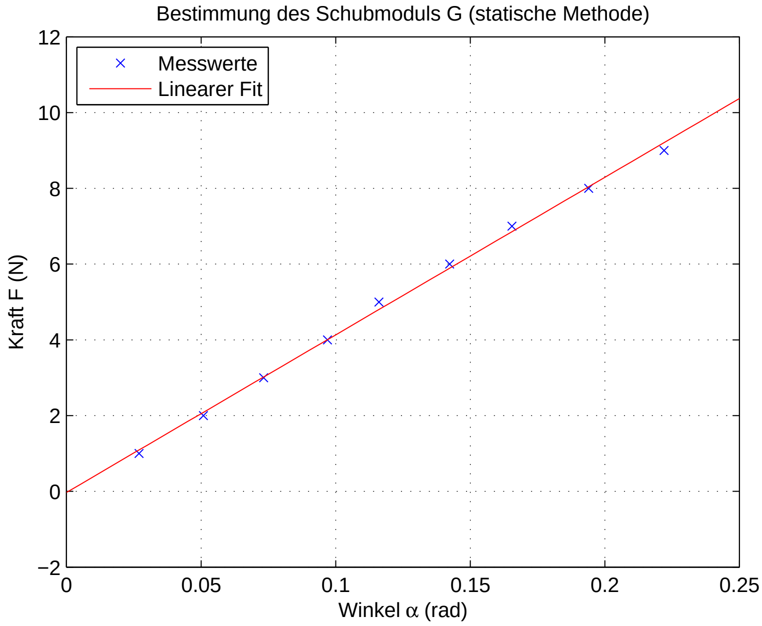
```
alpha = l/l_stern * 1/2 * atan(a/b);    % x-Werte im x-y-Diagramm
```

Nun kann die Kraft F gegen den Winkel α in einem x-y-Diagramm aufgetragen werden. Aus der Steigung A der Geraden lässt sich einfach der Schubmodul berechnen:

$$G_{stat} = \frac{4 \cdot l \cdot R}{\pi \cdot r^4} \cdot A$$

```
[A dA B dB] = niehuus(alpha,F); % Lineare Regression

t95 = 2.31;                     % Faktor für Vertrauensbereich von 95%
dA = t95*dA;                    % für n = 9 Messwerte (entnommen aus
dB = t95*dB;                    % Fehlerrechnungsskript S.3)
```

```
x = 0:0.005:0.25;               % Generieren einiger x-Werte
y = A.*x + B;                   % Generieren der Geraden y = Ax + B

G_stat = 4*l*R/(pi*r^4) * A;    % Berechnung des Schubmoduls

% Plotten der Werte/Regressionsgeraden
figure
plot(alpha,F,'bx',x,y,'r-');
grid on;
title('Bestimmung des Schubmoduls G (statische Methode)');
xlabel('Winkel \alpha (rad)');
ylabel('Kraft F (N)');
legend('Messwerte','Linearer Fit','Location','NorthWest');
```



Fehlerrechnung zum Abschnitt

Der Schubmodul wird nach der Gleichung

$$G_{stat} = \frac{4 \cdot l \cdot R}{\pi \cdot r^4} \cdot A$$

berechnet, wobei $A = \Delta F / \Delta \alpha$ die Steigung der Geraden ist. Für die Berechnung des Grösstfehlers werden folgende partielle Ableitungen der obigen Gleichung benötigt:

$$\frac{\partial G_{stat}}{\partial l} = \frac{4\, A\, R}{\pi\, r^4}$$

$$\frac{\partial G_{stat}}{\partial R} = \frac{4\,A\,l}{\pi\,r^4}$$
$$\frac{\partial G_{stat}}{\partial A} = \frac{4\,R\,l}{\pi\,r^4}$$
$$\frac{\partial G_{stat}}{\partial r} = -\frac{16\,A\,R\,l}{\pi\,r^5}$$

Die Beträge dieser Terme werden nun mit den jeweiligen Messunsicherheiten (z.B. Δl entspricht der Messunsicherheit in der Längenmessung) multipliziert und aufaddiert, d.h. man erhält

$$\Delta G_{stat} = \left|\frac{\partial G}{\partial l}\right| \cdot \Delta l + \ldots + \left|\frac{\partial G}{\partial r}\right| \cdot \Delta r$$

```
dG_stat = abs((4*A*R)/(pi*r^4)) * dl ...
    + abs((4*A*l)/(pi*r^4)) * dR ...
    + abs((4*R*l)/(pi*r^4)) * dA ...
    + abs(-(16*A*R*l)/(pi*r^5)) * dr;

% Ergebnis der Messung (ungerundet)
fprintf('Schubmodul (statische Methode): G = (%g +/- %g)N/m^2 \n',G_stat,dG_stat);
```

```
Schubmodul (statische Methode): G = (6.28416e+10 +/- 3.20003e+09)N/m^2
```

Bestimmung des Schubmoduls G_{dyn} (dynamische Methode)

Eine Stahlscheibe mit bekanntem Trägheitsmoment ist an das freie Drahtende festgeschraubt. Bei kleinen Auslenkungen ($\leq 5°$) führt die Scheibe eine harmonische Drehschwingung aus. Es werden 20 Perioden gemessen und aus der folgenden Gleichung der Schubmodul berechnet:

$$T = \sqrt{\frac{8 \cdot \pi \cdot l_s \cdot J}{G \cdot r^4}}$$

wobei J das Trägheitsmoment der Scheibe ist ($J = \frac{1}{2} m_s \cdot r_s^2$), l_s die Länge des Drahtes von der Einspannung bis zur Scheibe, T die Periodendauer und r der Radius des Drahtes ist.

```
% Messwerte zu 20*T
T_mess = [19.2 19.1 18.9 19.1 19.1];
T_mess = T_mess/20;             % Umrechnung auf eine Periode
T = mean(T_mess);               % Mittelwert einer Periodendauer

t95 = 2.78;
dT_stat = t95 * std(T_mess)/(sqrt(5));  % Standardabweichung des Mittelwerts
dT_reakt = 0.3/20;              % Messunsicherheit d. persönl. Reaktionszeit
```

```
dT = dT_reakt + dT_stat;         % Gesamtunsicherheit der Zeitmessung

l_s = 0.371;                     % Abstand Drahteinspannung -> Scheibe
dl_s = 1e-3;                     % Messunsicherheit der Längenmessung

% Berechnung des Trägheitsmomentes der Scheibe
m_s = 2.937;  dm_s = 5e-4;       % Masse der Scheibe
r_s = 0.1;    dr_s = 1.25e-3;    % Radius der Scheibe

J = 1/2 * m_s * r_s^2;           % Trägheitsmoment der Scheibe
dJ = abs(0.5*r_s^2) * dm_s + ...
     abs(2 * 0.5 * m_s * r_s) * dr_s;

G_dyn = 8*pi*l_s*J/(T^2*r^4);    % Berechneter Schubmodul
```

Fehlerrechnung zum Abschnitt

Der Schubmodul kann wird nach der folgenden Gleichung berechnet

$$G_{dyn} = \frac{8 \cdot \pi \cdot l_s \cdot J}{T^2 \cdot r^4}$$

Die partiellen Ableitungen dieser Gleichung sind

$$\frac{\partial G_{dyn}}{\partial l_s} = \frac{8\,\pi\,J}{T^2\,r^4}$$

$$\frac{\partial G_{dyn}}{\partial J} = \frac{8\,\pi\,l_s}{T^2\,r^4}$$

$$\frac{\partial G_{dyn}}{\partial T} = -\frac{16\,\pi\,J\,l_s}{T^3\,r^4}$$

$$\frac{\partial G_{dyn}}{\partial r} = -\frac{32\,\pi\,J\,l_s}{T^2\,r^5}$$

Die Beträge dieser Terme werden analog zur statischen Methode mit den jeweiligen Messunsicherheiten multipliziert und die Summe gebildet, also:

$$\Delta G_{dyn} = \left|\frac{\partial G_{dyn}}{\partial l_s}\right| \cdot \Delta l_s + \ldots + \left|\frac{\partial G_{dyn}}{\partial r}\right| \cdot \Delta r$$

```
dG_dyn = abs((8*pi*J)/(T^2*r^4)) * dl_s ...
    + abs((8*pi*l_s)/(T^2*r^4)) * dJ ...
    + abs(-(16*pi*J*l_s)/(T^3*r^4)) * dT ...
    + abs(-(32*pi*J*l_s)/(T^2*r^5)) * dr;

% Ergebnis der Messung (ungerundet)
fprintf('Schubmodul (dynamische Methode): G = (%g +/- %g)N/m^2 \n',G_dyn,dG_dyn);
```

```
Schubmodul (dynamische Methode): G = (6.34518e+10 +/- 5.04954e+09)N/m^2
```

Fazit

Die Ergebnisse zur Bestimmung der Federkonstanten (dyn. und stat.) stimmen gut überein (also im Rahmen der Messunsicherheiten). Die effektive Federmasse sollte laut Theorie $1/3 \cdot m_F$ betragen. Die Masse der Feder beträgt 15.9g, die effektive Federmasse sollte also ca. 5.3g betragen. In meinem Fall ist der Wert $m_{F,eff} \approx 11g$ ein bisschen zu hoch, aber dennoch im Rahmen der Messunsicherheiten.

Für den Schubmodul des gemessenen Drahtes gibt es leider keine Literaturwerte, aber zumindest stimmt die Grössenordnung des Ergebnisses. Stähle besitzen ein Schubmodul im Bereich von ca. 80 GPa [Walcher].

Copyright