

Bestimmung der Erdbeschleunigung mit dem Reversionspendel und dem Fadenpendel

Denis Nordmann

<http://physik.co-i60.com>

9. Mai 2013

Grundlagen

- Schwingungen

- Mathematisches Pendel

- Physikalisches Pendel

 - Satz von Steiner

 - Reversionspendel

Versuchsaufbau

Versuchsauswertung und Fehleranalyse

- Beispielmessung Fadenpendel

- Beispielmessung Reversionspendel

Zusammenfassung der Ergebnisse

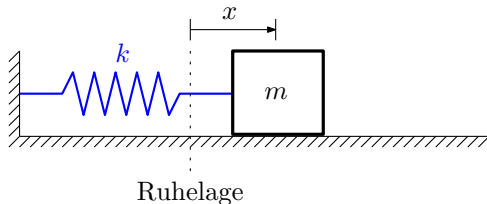
- Fehlerdiskussion

Literatur und Quellenangaben

Schwingung

Schwingungen sind zeitlich periodische Zustandsänderungen eines Systems. Sie treten immer dann auf, wenn

- ▶ ein System durch eine äußere Störung aus seinem mechanischen Gleichgewicht gebracht wird und
- ▶ Kräfte wirksam werden, die das System wieder in Richtung des Gleichgewichts bewegen
- ▶ Beispiel: Horizontal eingespannte Feder (Reibung vernachlässigt)



k : Federkonstante, m : Masse des Gegenstandes, x : Auslenkung

Harmonische Schwingung

Bedingung für eine harmonische Schwingung ist

- ▶ Beschleunigung \ddot{x} ist proportional zur Auslenkung x
- ▶ Beschleunigung und Auslenkung haben entgegengesetztes Vorzeichen, also $\ddot{x} \propto -x$ (lies "ẍ ist proportional zu x")
⇒ Gegenstand führt eine harmonische Schwingung aus

Beispiel zur Rückstellkraft einer Feder unter Anwendung des 2. Newtonschen Gesetzes $F = m \cdot \ddot{x}$

$$F = -k \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{k}{m}\right) \cdot x \quad (3)$$

- ▶ Harmonische Schwingungen können durch sinus-/cosinus-förmige Funktionen beschrieben werden

Auslenkung, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Gleichung der harmonischen Schwingung für ...

Auslenkung x

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (4)$$

A : Amplitude (in m), δ : Phasenkonstante (in rad)

Geschwindigkeit \dot{x}

$$\dot{x} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad (5)$$

Beschleunigung \ddot{x}

$$\ddot{x} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 \cdot x \quad (6)$$

Tipp: Hier muss man jedes mal die "Kettenregel" aus der Differentialrechnung anwenden (äußere Ableitung mal innere Ableitung)

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

ist eine mögliche Lösung der Differentialgleichung (3)

$$\ddot{x} = -\left(\frac{k}{m}\right) \cdot x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x$$

mit der sog. Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7)$$

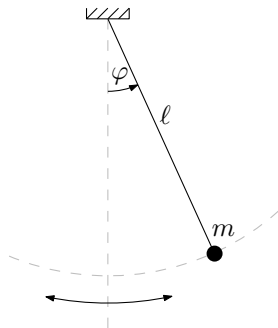
Wichtige Begriffe: Frequenz f , Periodendauer T und Kreisfrequenz ω

$$f = \frac{1}{T} \quad (8)$$

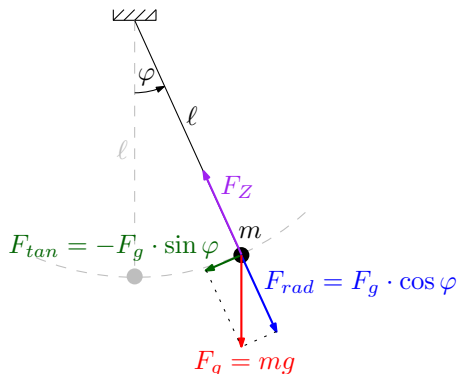
$$\omega = 2\pi \cdot f \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T} \quad (9)$$

Mathematisches Pendel

- ▶ Das mathematische Pendel ist ein physikalisches Modell eines Pendels, bei dem man folgende Annahmen macht:
 - ▶ eine punktförmige Masse m pendelt im Abstand ℓ um einen Aufhängepunkt
 - ▶ Die Masse des Fadens vernachlässigbar klein
 - ▶ Widerstände durch Luftreibung und Dämpfung werden vernachlässigt



Zerlegung der Kraftkomponenten



m : Masse

g : Erdbeschleunigung ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

φ : Winkel der Auslenkung

l : Länge des Fadens

- ▶ Es wirkt die Gewichtskraft
 $F_g = mg$
- ▶ Die Zugkraft
 $F_Z = -F_g \cdot \cos \varphi$
- ▶ Eine radiale Komponente
 $F_{rad} = F_g \cdot \cos \varphi$
- ▶ Eine tangentielle Komponente
 $F_{tan} = -F_g \cdot \sin \varphi$

Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels

- ▶ F_{rad} und F_Z kommen für die Pendelbewegung nicht in Frage
- ▶ Die tangentielle Komponente sorgt dafür, dass die Masse beschleunigt wird. Die Anwendung des 2. Newtonschen Gesetzes bringt also

$$F_{tan} = m \cdot a_{tan} = -mg \cdot \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad a_{tan} = -g \cdot \sin \varphi$$
- ▶ Die Tangentialbeschleunigung a_{tan} kann durch die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ ausgedrückt werden, so ist

$$a_{tan} = l \cdot \ddot{\varphi} \quad (10)$$

- ▶ Dies führt zur Bewegungsgleichung in expliziter bzw. impliziter Form

$$l \cdot \ddot{\varphi} = -g \cdot \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0$$

- ▶ Mit der Kleinwinkelnäherung $\sin \varphi \approx \varphi$ erhalten wir schließlich die Dgl.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0 \quad (11)$$

Lösung der Dgl.

- ▶ Die Gleichung (11) hat die Form $\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x$ (explizite Darstellung) bzw. $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$ (implizite Darstellung).
- ▶ Die Lösung dieser Gleichung kennen wir schon! Es handelt sich um eine harmonische Schwingung der Form $\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$
- ▶ Für unser Experiment ist die Kreisfrequenz von Interesse, als aus $\ddot{\varphi} + \underbrace{(g/\ell)}_{\omega^2} \cdot \varphi = 0$ bekommt man

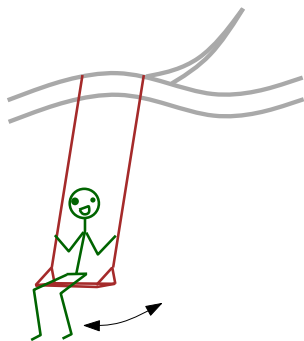
$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (12)$$

- ▶ Hieraus lässt sich bei bekannter Periodendauer T und der Länge des mathematischen Pendels ℓ die Erdbeschleunigung g bestimmen

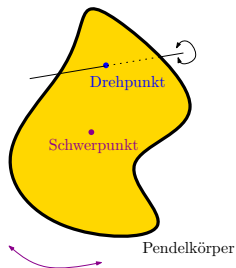
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad g = 4\pi^2 \cdot \frac{\ell}{T^2} \quad (13)$$

Physikalisches bzw. physisches Pendel

- ▶ Bei einem “realen Pendel” ist die Masse nicht punktförmig und die Aufhängung ist nicht masselos
- ▶ Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, welcher um einen Drehpunkt schwingen kann

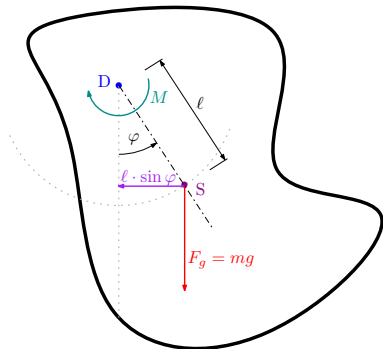


Ein “reales Pendel” ;)



Physikalisches Pendel, beliebig
geformter Körper

Kraftkomponenten beim physikalischen Pendel



- ▶ Es wirkt die Gewichtskraft $F_g = mg$
- ▶ Bei Auslenkung: Gewichtskraft verursacht ein rücktreibendes Moment $M = -F_g \cdot l \cdot \sin \varphi$

D : Drehachse, S : Symmetrieachse

l : Abstand Drehachse \rightarrow Schwerpunkt, m : Masse des Körpers

g : Erdbeschleunigung, φ : Winkel der Auslenkung

M : Rücktreibendes Drehmoment

Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels

- ▶ Zusammenhang zwischen Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ und Drehmoment M :

$$M = J \cdot \ddot{\varphi} \quad (14)$$

J : Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Drehachse D

- ▶ Dies führt zur Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad J\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad (15)$$

Mit der Kleinwinkelnäherung $\sin \varphi \approx \varphi$ bekommen wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \varphi = 0 \quad (16)$$

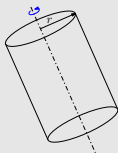
mit der Kreisfrequenz und der Periodendauer

$$\omega^2 = \frac{mgl}{J} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (17)$$

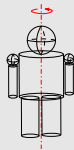
Trägheitsmoment J

- ▶ Bei einfachen geometrischen Körpern (Kugel, Zylinder, Stab) ist das Trägheitsmoment J um eine beliebige Symmetrieachse berechenbar
z.B. Trägheitsmoment eines Kreiszylinders: $J_S = \frac{m}{2}r^2$
- ▶ Bei komplizierten Geometrien muss man das Trägheitsmoment abschätzen ($J_{ges} = \sum J_i$) oder messen (mittels Drehtisch)
- ▶ Wie ändert sich das Trägheitsmoment, wenn die Drehachse *nicht* mit der Symmetrieachse zusammenfällt? \Rightarrow Satz von Steiner

Einfache Geometrie: ein Zylinder



Kompliziert: z.B. ein Mensch



$J_{Mensch} = ???$

Satz von Steiner

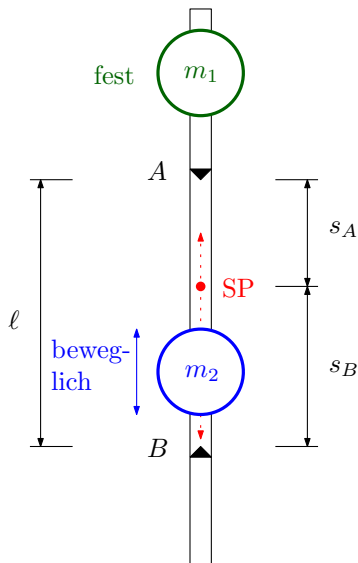
- ▶ Hängt man einen Körper in seinem Schwerpunkt auf \Rightarrow kein Rückstellmoment \Rightarrow keine Pendelbewegung
- ▶ Befindet sich die Drehachse parallel und außerhalb des Schwerpunkts \Rightarrow Pendelbewegung nach Auslenkung
- ▶ Der Körper hat nun ein anderes Trägheitsmoment: es setzt sich zusammen aus dem Eigenträgheitsmoment J_s und dem Produkt aus Körpermasse und dem quadratischen Abstand s zwischen der Symmetrieachse und der Drehachse

Satz von Steiner

$$J = J_s + m \cdot s^2 \quad (18)$$

J_s : Trägheitsmoment um Symmetrieachse, m : Masse des Körpers, s : Abstand Symmetrieachse \rightarrow Drehachse

Reversionspendel



- ▶ Beim Verschieben der Masse m_2 "wandert" der Schwerpunkt SP zwischen den Drehpunkten A und B
- ▶ Dabei ändert sich das Trägheitsmoment relativ zu A und B
- ▶ Die Periodendauer ändert sich mit dem Trägheitsmoment gemäß

$$T_A = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot g \cdot s_A}}, T_B = \dots$$

Reversionspendel: Schritt für Schritt

- ▶ Es wird gefordert, dass die Periodendauern $T_A = T_B$ sind, d.h. $\omega_A = \omega_B$ mit $\omega_A^2 = \frac{m \cdot g \cdot s_A}{J_A}$ und $\omega_B^2 = \frac{m \cdot g \cdot s_B}{J_B}$
- ▶ Aus $\omega_A^2 = \omega_B^2$ erhalte ich aus der obigen Zeile

$$J_A \cdot s_B = J_B \cdot s_A \quad (19)$$

- ▶ Jetzt kommt die Anwendung des Steinerschen Satzes, d.h. ich setze ein

$$J_A = J_S + m \cdot s_A^2 \xrightarrow{\text{Gl. (19)}} (J_S + m \cdot s_A^2) \cdot s_B = (J_S + m \cdot s_B^2) \cdot s_A \quad (20)$$

- ▶ Weiter umgeformt erhalte ich

$$J_S \cdot (s_B - s_A) = m \cdot s_A \cdot s_B \cdot (s_B - s_A) \quad (21)$$

$$J_S = m \cdot s_A \cdot s_B \quad (22)$$

Gleich ist es geschafft!

- ▶ Jetzt kombiniere ich Gleichung (17) (Periodendauer des physikalischen Pendels) mit (18) (Satz von Steiner) und Gl. (22) (Ausdruck für J_S)
- ▶ Für die Periodendauer T des physikalischen Pendels erhalte ich nach einigen Umformungen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot g \cdot s_A}} \quad |\text{Satz von Steiner eingesetzt} \quad (23)$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{J_S + m \cdot s_A^2}{m \cdot g \cdot s_A}} \quad |\text{Gleichung (22) für } J_S \text{ eingesetzt} \quad (24)$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot s_A \cdot s_B + m \cdot s_A^2}{m \cdot g \cdot s_A}} \quad |m \text{ und } s_A \text{ kürzen sich weg} \quad (25)$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{s_A + s_B}{g}} \quad (26)$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (27)$$

- ▶ Bei dem Ausdruck $\ell = s_A + s_B$ handelt es sich um die sogenannte reduzierte Pendellänge

Versuchsaufbau



Reversionspendel



Fadenpendel

Beispielmessung: Mathematisches Pendel

- ▶ Fadenlänge: $l_{Faden} = (62.0 \pm 0.1)cm$
- ▶ Kugeldurchmesser: $d = (1.8 \pm 0.1)cm$
- ▶ Länge des mathematischen Pendels: $\ell = (0.629 \pm 0.001)m$

Messung mit $n = 100$ Perioden

MessNr.	AdP	PD	MU	DeP	MUeP
i	n	$n \cdot T$ (sec)	ΔT (sec)	\bar{T} (sec)	$\Delta T/n$ (sec)
1	100	158.7	0.3	1.587	0.003

Aus Platzgründen habe ich folgende Abkürzungen in der obigen Tabelle verwendet:

AdP: Anzahl der Perioden

PD: Periodendauer von n -Perioden bzw. gemessene Zeit

MU: Messunsicherheit von n -Perioden (persönl. Reaktionszeit $\approx 0.3s$)

DeP: Dauer einer Periode, MUeP: Messunsicherheit einer Periode

Berechnung der Erdbeschleunigung

- ▶ Es wurde nur eine Messung durchgeführt. Idealerweise sollte man immer Mehrfachmessungen durchführen, um eine bessere Statistik zu erhalten. Aus ℓ und T wird die Erdbeschleunigung g direkt berechnet

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.629 \text{ m}}{(1.587 \text{ s})^2} = 9.8595 \dots \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (28)$$

- ▶ Die Messunsicherheit wird nach dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet. Dazu benötigt man folgende partielle Ableitungen der Gleichung $g = 4\pi^2 \ell / T^2$

$$\frac{\partial g}{\partial \ell} = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (29)$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -2 \cdot \frac{4\pi^2 \ell}{T^3} \quad (30)$$

Berechnung von Δg

- ▶ Die Gesamtunsicherheit lautet dann

$$\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial \ell} \cdot \Delta \ell \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \cdot \Delta T \right| \quad (31)$$

- ▶ Werte einsetzen und man erhält

$$\begin{aligned} \Delta g &= \left| \frac{4\pi^2}{(1.587s)^2} \cdot 0.001m \right| + \left| \frac{-8\pi^2 \cdot 0.629m}{(1.587s)^3} \cdot 0.003s \right| \\ &= 0.053 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

- ▶ Messergebnis (gerundet)

$$g = (9.86 \pm 0.06) \frac{m}{s^2}$$

Reversionspendel

- ▶ Abstand der Schneiden: $\ell = (99.4 \pm 0.1) \text{cm}$
- ▶ m_1 wird im Abstand von ca. 25cm von der Drehachse A positioniert
- ▶ Das Laufgewicht (m_2) wird möglichst nahe an Drehachse A gebracht, sodass $s_A \approx 10 \text{cm}$ ist, anschließend wird die Dauer von 10 Perioden (besser 20 oder 40 - je nach Versuchsanleitung) gemessen
- ▶ Das Pendel wird aus der Aufhängung genommen und um 180° gedreht → erneut 10 Perioden messen
- ▶ Das Pendel wird wieder um die Drehachse A aufgehängt und s_A um $+5 \text{cm}$ erhöht, 10 Perioden gemessen usw.
- ▶ Der Verlauf der Periodendauer $T_{A/B}$ wird in einem T - $s_{A/B}$ -Diagramm grafisch aufgetragen, wobei der Abstand s_A (oder s_B) dem Abstand von einer der beiden Drehachsen entspricht
- ▶ Der Schnittpunkt der beiden Kurven liefert uns die Periodendauer T - notwendig für die Berechnung der Erdbeschleunigung g

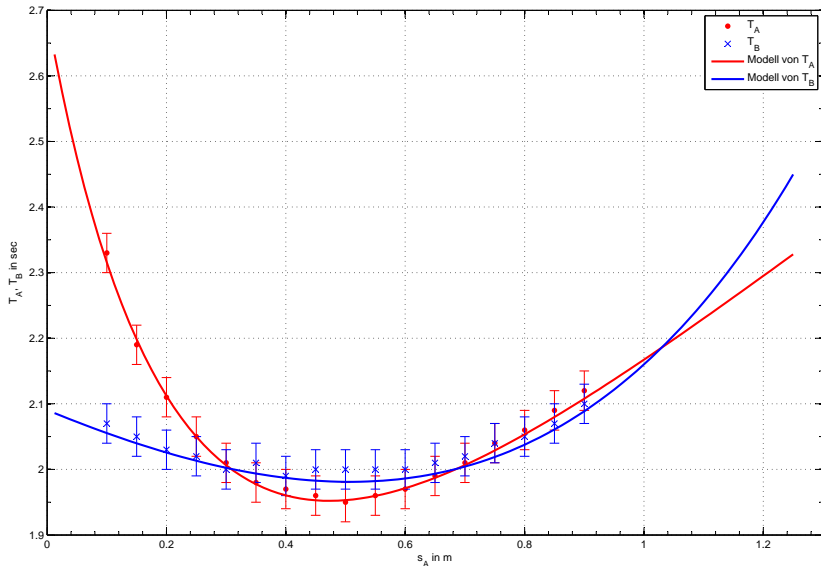
Beispielmessung

- ▶ Persönliche Reaktionszeit: $\Delta T = 0.3s$
- ▶ Anzahl der gemessenen Perioden: $n = 10$

Messwertetabelle

MessNr. i	Abstand zu A $s_A(m)$	Periodendauer A $T_A(sec)$	Periodendauer B $T_B(sec)$	Messunsicherheit $\Delta T(sec)$
1	0.1	2.33	2.07	0.03
2	0.15	2.19	2.05	0.03
3	0.2	2.11	2.03	0.03
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	0.8	2.06	2.05	0.03
16	0.85	2.09	2.07	0.03
17	0.9	2.12	2.1	0.03

- ▶ Schauen wir uns mal die grafische Darstellung der Messwerte an

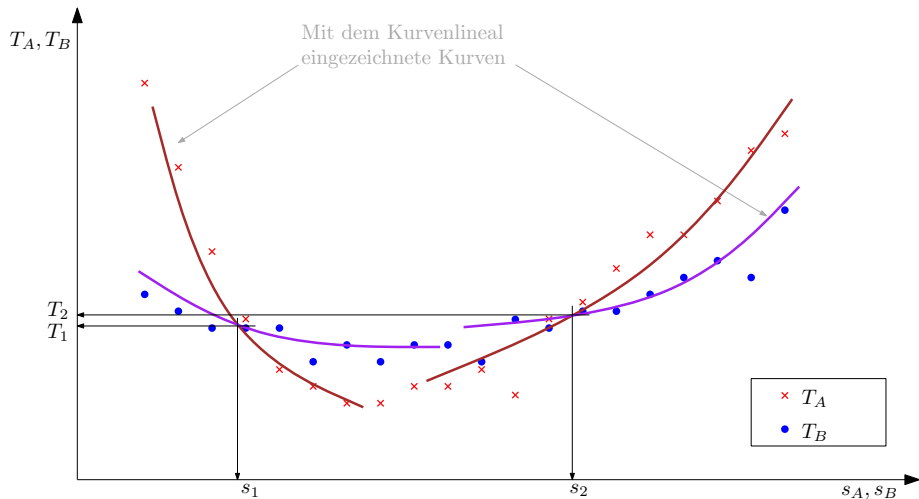
Grafische Auftragung von T_A und T_B gegen s_A 

Ermittlung der Schnittpunkte

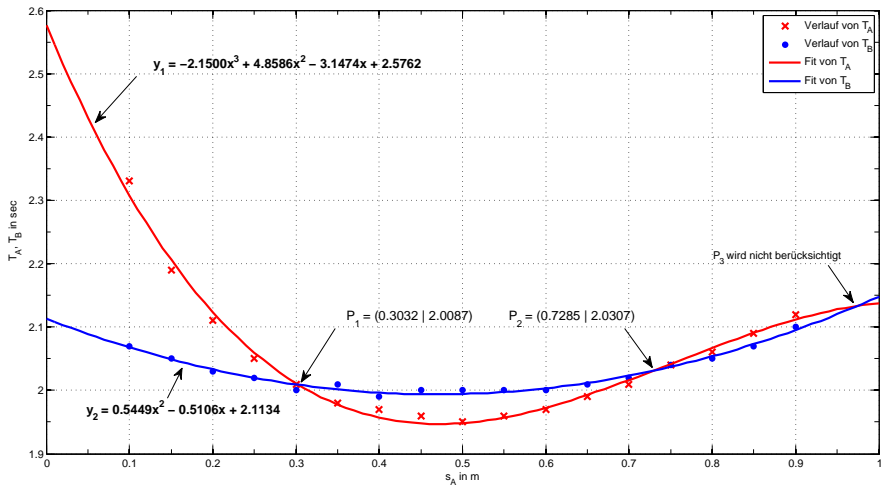
Es gibt mehrere Varianten der Auswertung

- ▶ Freihand oder mit einem Kurvenlineal bestmögliche Kurven auf Millimeterpapier einzeichnen, T_A und T_B an den Schnittpunkten ablesen
- ▶ Nichtlineare Regression (mit einem Computerprogramm, z.B. Excel, Origin, MATLAB, ...), anschließend die Schnittpunkte mit einem Suchalgorithmus finden bzw. aus dem Diagramm ablesen
- ▶ Die erste Methode ist sehr einfach durchzuführen, die zweite Methode ist etwas aufwendiger aber führt unter Umständen zu einem genaueren Ergebnis

Methode 1: Mit Kurvenlineal und Bleistift



Methode 2: Anfitten von Kurven mittels PC



Auswertung der Messdaten

Fassen wir zusammen

- ▶ Schneidenabstand: $\ell = (0.994 \pm 0.001)m$
- ▶ Periodendauern: $T_1 = (2.01 \pm 0.03)s$ und $T_2 = (2.03 \pm 0.03)s$
Mittlere Periodendauer: $T = (2.02 \pm 0.03)s$
- ▶ Erdbeschleunigung

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{0.994m}{(2.02s)^2} = 9.62 \frac{m}{s^2}$$

- ▶ Berechnung der Messunsicherheit Δg

$$\begin{aligned}\Delta g &= \left| \frac{4\pi^2}{(2.02s)^2} \cdot 0.001m \right| + \left| \frac{-8\pi^2 \cdot 0.994m}{(2.02s)^3} \cdot 0.03s \right| \\ &= 0.295 \frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

- ▶ Messergebnis (gerundet)

$$g = (9.6 \pm 0.3) \frac{m}{s^2}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

Messergebnis zum mathematischen Pendel (Fadenpendel)

$$g_{math} = (9.86 \pm 0.12) \frac{m}{s^2}$$

Messergebnis zum physikalischen Pendel (Reversionspendel)

$$g_{phys} = (9.6 \pm 0.6) \frac{m}{s^2}$$

Beide Messunsicherheiten sind mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ multipliziert worden. Damit ist der Vertrauensbereich mit einer statistischen Sicherheit von etwa 95% gegeben.

Diskussion der Ergebnisse

Der Literaturwert¹ für den Standort Physiklabor an der TH Mittelhessen, Friedberg (Hessen) ist

$$g_{Fb} = 9.810611(41) \frac{m}{s^2} \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Relative Abweichungen vom Literaturwert

$$\left(\frac{g_{math}}{g_{Fb}} - 1 \right) \cdot 100\% = 0.5\%$$

$$\left(\frac{g_{phys}}{g_{Fb}} - 1 \right) \cdot 100\% \approx -2\%$$

Beide Messergebnisse stimmen mit dem Literaturwert im Rahmen der Fehlergrenzen überein.

¹Quelle: Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, <http://www.ptb.de>

Fazit

Mathematisches Pendel

- ▶ Der Bestwert von g_{math} stimmt mit dem Literaturwert gut überein, auch die Fehlerintervalle überlappen mit dem Literaturwert.
- ▶ Durchführung des Experiments war sehr einfach

Physikalisches Pendel

- ▶ Beim physikalischen Pendel habe ich eine relativ hohe Messunsicherheit von Δg_{phys} im Vergleich mit Δg_{math} . Es liegt wohl an den gemessenen 10 Schwingungsdauern pro Messung, besser wären $20 \cdot T_{A/B}$ oder $40 \cdot T_{A/B}$.
- ▶ Der Bestwert von g_{phys} liegt 2% unter dem Literaturwert. Es handelt sich vermutlich einen (unbekannten) systematischen Fehler im Aufbau.
- ▶ Vergleicht man die Messung mit der Theorie (siehe grafische Auftragung der Werte), so liegen die Messwerte von T_B über der Modellkurve zu $T_B \rightarrow$ eventuelle Ursache: Verschleißerscheinungen beim Reversionspendel?
- ▶ Es wurden Faktoren wie Luftreibung, Dämpfung der Schwingung, Mitschwingung der Stative etc. vernachlässigt
- ▶ Die Messgenauigkeit des Reversionspendels lässt sich bei sorgfältig durchgeführter Messung um Faktor 10 oder höher steigern!

Literatur

Bücher

- ▶ Physik für Wissenschaftler und Ingenieure
Tipler, Paul Allen. - 6. dt. Aufl., korrigierter Nachdr. - Berlin [u.a.] : Springer, 2012
- ▶ Praktikum der Physik
Walcher, Wilhelm. - 9., überarb. Aufl. - Wiesbaden : Teubner, 2006

Internet

- ▶ Fehlerrechnungsskript von Prof. Niehuus, FH Gießen-Friedberg 2005
http://galileo.mnd.th-mittelhessen.de/images/personen/kreuz_patricia/fehlerrechnung_niehuus05.pdf
- ▶ Anleitungen aus dem Physiklabor der TH Mittelhessen, Friedberg 2013
<http://galileo.mnd.th-mittelhessen.de/fachbereich/labore/616.html-versuche/616-versuche>
- ▶ Wikipedia, Pendel (Artikel abgerufen im März 2013)
<http://de.wikipedia.org/wiki/Pendel>

Copyright



Dieses Werk bzw. Inhalt steht unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland Lizenz.

Danksagungen

Ich bedanke mich für die freundliche Unterstützung bei der TH Mittelhessen (Campus Friedberg). Mein Dank gilt ebenfalls den Dozenten im Physik-Grundlagenlabor.

Version 0.3 vom 9. Mai 2013,
Download der Folien unter <http://physik.co-i60.com>