v1.3 - Trägheitsmoment eines Speichenrades

Versuch durchgeführt am 25.03.2013 von dn, Version vom 14.04.2013

Contents

Durchführung

- Verfahren 1: Man lässt ein Gewicht der Masse m aus einer Anfangshöhe s_1 los und stoppt die Zeit t bis zum Abwickeln des Fadens. Diese Strecke wird als h_1 bezeichnet. Daraufhin wickelt sich der Faden erneut auf und man bestimmt die Strecke von der tiefsten Lage bis zum Stillstand des Gewichts (Strecke h_2).
- Verfahren 2: An das Speichenrad wird kleines Gewicht festgeschraubt, nach der Auslenkung pendelt das Rad. Man misst einige Perioden und den Abstand vom Aufhängepunkt bis zum Gewicht und berechnet hieraus das Trägheitsmoment.
- Verfahren 3: Das Speichenrad wird am Radkranz eingehängt, ausgelenkt und aus dem Abstand s und der Periodendauer T das Trägheitsmoment bestimmt.

```
% Initialisierungsoptionen für MATLAB
clear all;                        % Löschen alter Variablen
close all;                        % Schliessen der Fenster
clc;                              % Löschen der Ausgaben im Kommandofenster
```

Abschätzung der Trägheitsmomente

Man kann anhand der Geometrie des Speichenrades eine Abschätzung des Trägheitsmomentes machen. Man unterteilt also das Speichenrad in einen Vollzylinder, einen Hohlzylinder sowie 5 konzentrisch verlaufende dünne Stäbe. Das Gesamtträgheitsmoment ist dann die Summe der Einzelträgheitsmomente, $J_{ges} = \sum_i J_i$.

Die Trägheitsmomente für die einzelnen Elemente sind:

- Vollzylinder mit $J_V = \frac{1}{2}mr^2$
- Dünner Stab (5x vorhanden) mit $J_S = \frac{1}{12}ml^2$
- Hohlzylinder mit $J_H = m\frac{r_i^2+r_a^2}{2}$

Im ersten Schritt werden die Einzelvolumina V_V, V_S und V_H ermittelt. Die Gesamtmasse m des Speichenrades wird durch eine Wiegung bestimmt. Aus der Masse und dem Gesamtvolumen des Rades lässt sich die Dichte des Materials berechnen. Die Einzelmassen (wichtig für die Berechnung der Trägheitsmomente) der Komponenten werden über die Dichte und Volumen berechnet, also gemäss

$$\varrho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \varrho \cdot V$$

Mit einem Lineal und Messschieber konnten folgende geometrische Grössen bestimmt werden:

- Vollzylinder: Durchmesser: 4.66cm, Höhe: 2.83cm
- Stab: Länge: 7.5cm, Höhe: 1.28cm, Breite: 2.43cm
- Hohlzylinder: Umfang: 8.6cm, Aussendurchmesser: 24.9cm, Innendurchmesser = 6cm

Die Formeln für die Volumina sind z.B. in Formelsammlungen oder im Internet leicht zu finden. So ist z.B. das Volumen eines Vollzylinders mit dem Radius r und der Höhe h: $V_V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Wichtig: Alle Grössen werden in SI-Einheiten (m, kg, s) berechnet!

```
V_V = pi*(0.0466/2)^2*0.0457;   % V = pi*r^2*h (Inkl. Zusatzmasse)
V_S = 0.075*0.0128*0.0243;      % V = l*b*h
V_H = 0.5*(0.249-0.06)/2*0.086^2; % V = 0.5*U^2*r

m_ges = 1.7382;                 % Gesamtmasse des Rades in kg
V_ges = V_H + V_S + V_V;        % Gesamtvolumen als Summe von Einzelvolumina
dichte = m_ges/V_ges;           % Berechnet in kg/m^3
```

Nun können die Trägheitsmomente gemäss der obigen Formeln berechnet werden. Die Masse eines Elements wird indirekt über das Volumen und die Dichte berechnet, d.h. $m = \varrho \cdot V$ (ϱ: Dichte, V: Volumen).

```
J_V = 0.5 * dichte*V_V * (0.0466/2)^2;          % Vollzylinder
J_S = 5 * 1/12 * dichte*V_S * 0.075^2;          % Stab, 5x vorhanden
J_H = dichte*V_H * (0.1245^2 + 0.1095^2)/2;     % Hohlzylinder

J_ges = J_V + J_S + J_H;        % Gesamtträgheitsmoment

fprintf('Das Trägheitsmoment wird mit J_ges = %g kg*m^2 geschätzt. \n',J_ges);
```

```
Das Trägheitsmoment wird mit J_ges = 0.0188163 kg*m^2 geschätzt.
```

Damit ist die Abschätzung beendet, d.h. es wird ein Trägheitsmoment in dieser Grössenordnung erwartet.

Verfahren 1: Die Ab- und Auflaufmethode

Das Gewicht, das am Faden hängt, wird gewogen und der Radius der Wickel mit einem Messschieber bestimmt. Für die Berechnung des Trägheitsmoments (siehe Versuchsanleitung) benötigt man noch die Erdbeschleunigung. Sie wird mit $g = 9.81 m/s^2$ angenommen.

```
m = 0.5005;                     % Masse des Gewichts in kg
r = 5e-3;                       % Radius der Wickel in m
g = 9.81;                       % Erdbeschleunigung in m/s^2
```

Zu jeder Messung gehört immer eine Messunsicherheit. Hier sind die Werte Zusammengefasst:

```
dm = 1e-4;                      % Messunsicherheit bei der Wägung +/- 0.1g
dr = 5e-5;                      % Messunsicherheit des Radius +/- 0.05mm
ds = 2e-3;                      % Messunsicherheit der Höhen h1, h2 +/- 2mm
dh1 = ds;                       % in Teilversuch 1
dh2 = ds;
dt = 0.3;                       % Persönliche Reaktionszeit bei d. Zeitmessung.
```

Man bestimmt die Höhendifferenzen h_1 und h_2, sowie die Zeit t zum Abwickeln des Fadens. Die Messung wird zwei mal durchgeführt: einmal wickelt sich der Faden im Uhrzeigersinn ab, einmal im Gegenuhrzeigersinn ab. Es sollten in beiden Fällen gleiche Ergebnisse erzielt werden.

```
s_0 = 0.179;                    % Tiefste Lage s_0 in m
s_1 = 0.414;                    % Fallhöhe s_1 in m
```

```
% Messung im Gegenuhrzeigersinn
s_li = 0.384;                    % Strecke vom Nulldurchgang bis zum Stillstand
t_li = 6.8;                      % Zeit von der Ruhelage bis zum Nulldurchgang

% Messung im Uhrzeigersinn
s_re = 0.388;                    % Strecke beim Aufwickeln
t_re = 6.7;                      % Zeit zum Abwickeln

s_2 = mean([s_li s_re]);         % Mittelwert aus s_li und s_re
t = mean([t_li t_re]);           % Mittelwert aus t_li und t_re
```

Die Werte können nun in die Formel aus der Versuchsanleitung eingesetzt werden. Das Trägheitsmoment des Speichenrades ist dann gegeben mit

$$J_1 = m \cdot g \cdot r^2 \cdot t^2 \cdot \frac{h_1}{h_1 \cdot (h_1 + h_2)} - m \cdot r^2$$

```
h1 = s_1 - s_0;
h2 = s_2 - s_0;

J1 = m*g*r^2*t^2 * h2/(h1*(h1+h2)) - m*r^2;
```

Zur Berechnung der Messunsicherheit werden (partielle) Ableitungen der obigen Gleichung benötigt. Das Trägheitsmoment J ist eine Funktion von verschiedenen Grössen und nach diesen Grössen (Radius, Zeit, usw.) muss man ableiten.

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial J_1}{\partial m} = g \cdot r^2 \cdot t^2 \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - r^2$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial r} = m \cdot g \cdot 2 \cdot r \cdot t^2 \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - 2 \cdot m \cdot r$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = m \cdot g \cdot r^2 \cdot 2 \cdot t \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial h_1} = -\frac{g\, h_2\, m\, r^2\, t^2}{h_1\, (h_1 + h_2)^2} - \frac{g\, h_2\, m\, r^2\, t^2}{{h_1}^2\, (h_1 + h_2)}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial h_2} = \frac{g\, m\, r^2\, t^2}{h_1\, (h_1 + h_2)} - \frac{g\, h_2\, m\, r^2\, t^2}{h_1\, (h_1 + h_2)^2}$$

Die Messunsicherheit in J_1 ist dann:

$$\Delta J_1 = \left|\frac{\partial J_1}{\partial m}\right| \cdot \Delta m + \ldots + \left|\frac{\partial J_1}{\partial h_2}\right| \cdot \Delta h_2$$

```
dJ1 = abs((g*r^2*t^2*h2/(h1*(h1+h2))) - r^2)*dm + ...
    abs(2*m*g*r*t^2*h2/(h1*(h1+h2)) - 2*m*r)*dr + ...
    abs(2*m*g*r^2*t*h2/(h1*(h1+h2)))*dt + ...
    abs(m*g*r^2*t^2*(1/((h1+h2)^2)))*dh2 + ...
    abs(-m*g*r^2*t^2*(-h2*(2*h1+h2)/(h1^2*(h1+h2)^2)))*dh1;

% Ergebnis (ungerundet)
fprintf('Ergebnis zu Verfahren 1: J_1 = (%g +/- %g) kg*m^2 \n',J1,dJ1);
```

```
Ergebnis zu Verfahren 1: J_1 = (0.011133 +/- 0.00141814) kg*m^2
```

Verfahren 2: Pendelbewegung durch Radmitte

An das Speichenrad wird nun ein Zusatzgewicht der Masse M montiert und der Abstand von der Drehachse bis zum Gewicht bestimmt. Dies ist die Strecke l. Anschliessend wird das Rad ausgelenkt und die Schwingungsdauer von 5 Perioden, also $5 \cdot T$ gemessen. Das Trägheitsmoment wird nach Gleichung

$$J_2 = \frac{T^2 \cdot m \cdot g \cdot l}{4\pi^2} - m \cdot l^2$$

berechnet.

Gemessen wurden folgende Periodendauern (in Sekunden). Diese werden auf eine Periode umgerechnet und anschliessend der Mittelwert und die Standardabweichung gebildet.

```
T_mess = [7.1 7.1 7.2 7.2 7.2 7.3 7.1 7.1 7.3 7.2];     % Messwerte zu 5*T
T = T_mess/5;                   % Umrechnung auf eine Periode
T = mean(T);                    % Mittelwert von T

dT_reakt = 0.3/5;               % Unsicherheit in der Reaktionszeit +/- 0.3s

t95 = 2.26;                     % Faktor für stat. Sicherheit von 95%
dT_stat = t95 * std(T_mess)/sqrt(length(T_mess));  % Stat. Unsicherheit von T
dT = dT_reakt + dT_stat;        % Gesamtunsicherheit von T
```

Berechnung der Korrekturterme (Dämpfung, grosse Auslenkungen)

Hier müssen noch die Korrekturen für die Dämpfung und grössere Auslenkungen (deutlich über 5ř) berücksichtigt werden. Die Korrekturterme sind einerseits für Dämpfung

$$T_D \approx T \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}}\right)^2\right)$$

und für grosse Amplituden

$$T_{\varphi_0} \approx T \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)$$

Für unsere Berechnungen von Interesse sind die relativen Fehler, also Abweichungen in Prozent. Sehr kleine Abweichungen (z.B. <<1%) können vernachlässigt werden. Grössere Abweichungen (z.B. >1%) sollten in die Korrektur mit einfliessen.

```
phi_0 = 40/180*pi;              % Anfangsauslenkung 40ř (hier in Radianten)
phi_i = phi_0;                  % Amplitude von phi ca. 40 Grad
phi_ii = 38/180*pi;             % Darauffolgende Amplitude phi_(i+1) ca. 38ř

Td = T * (1 + 1/2 * (1/(2*pi) * log(phi_i/phi_ii)^2));
Err_d = Td/T;                   % Rel. Fehler von T bezüglich der Dämpfung

Tphi0 = T * (1 + 1/4 * (sin(phi_0/2))^2);
Err_phi = Tphi0/T;              % Rel. Fehler von T bezüglich grossen Amplituden

% Ergebnisse (ungerundet)
fprintf('Beitrag der Dämpfung (V2): %g %% \n',(1-Err_d)*100);
fprintf('Beitrag von grossen Amplituden (V2): %g %% \n',(1-Err_phi)*100);
```

```
Beitrag der Dämpfung (V2): -0.0209368 %
Beitrag von grossen Amplituden (V2): -2.92444 %
```

Wie man anhand der obigen Rechnung sieht, verursachen grosse Amplituden Abweichungen im einstelligen Prozentbereich, während die Dämpfung eher eine untergeordnete Rolle (< 0.1%) spielt. Diese kann hier vernachlässigt werden.

```
T = Err_phi * T;                % Korrigierte Periodendauer für grosse
dT = Err_phi * dT;              % Amplituden (inkl. der Messunsicherheit)

l = 0.144;                      % Abstand Drehpunkt -> Gewichte
dl = 0.001;                     % Geschätzte Messunsicherheit

M = 0.2568;                     % Masse der Gewichte in kg
dM = 0.0001;                    % Messunsicherheit der Wägung in kg
```

Da nun alle Grössen bekannt sind, die für die Berechnung des Trägheitsmoments benötigt werden, werden sie in die obige Gleichung eingesetzt.

```
J2 = T^2/(4*pi^2) * M*g*l - M*l^2;
```

Für die Fehlerrechnung benötigt man wieder die partiellen Ableitungen der obigen Gleichung. Diese sind

$$\frac{\partial J_2}{\partial T} = \frac{T\,g\,l\,m}{2\,\pi^2}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial m} = \frac{T^2\,g\,l}{4\,\pi^2} - l^2$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial l} = \frac{T^2\,g\,m}{4\,\pi^2} - 2\,l\,m$$

Die Messunsicherheit von J_2 ist dann

$$\Delta J_2 = \left|\frac{\partial J_2}{\partial T}\right| \cdot \Delta T + \left|\frac{\partial J_2}{\partial m}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{\partial J_2}{\partial l}\right| \cdot \Delta l$$

```
dJ2 = abs((2*T*M*g*l/(4*pi^2)))*dT + ...
    abs(g*l*T^2/(4*pi^2) - l^2)*dM + ...
    abs(M*g*T^2/(4*pi^2) - 2*M*l)*dl;
```

Das Ergebnis der Messung lautet somit

```
fprintf('Ergebnis zu Verfahren 2: J_2 = (%g +/- %g) kg*m^2 \n',J2,dJ2);

% Löschen der Variablen, die später erneut benötigt werden
clear T_mess T dT phi_0 phi_i phi_ii Err_d Err_phi t95
```

```
Ergebnis zu Verfahren 2: J_2 = (0.014748 +/- 0.00332464) kg*m^2
```

Verfahren 3: Pendelbewegung am Radkranz

Im dritten Verfahren wird das Rad ausserhalb der Drehachse eingehängt und zum Schwingen gebracht. Aus der Periodendauer T und dem Abstand s vom Schwerpunkt (Radmitte) zum Drehpunkt lässt sich das Trägheitsmoment mit

$$J_3 = \left(\frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot g - s\right) \cdot m_{Rad} \cdot s$$

```
m_rad = 1.7382;                 % Gesamtmasse des Rades in kg
dm_rad = 0.0001;                % Messunsicherheit der Wägung

s = 0.092;                      % Abstand Radmitte -> Aufhängung
ds = 0.001;                     % Messunsicherheit zu s

% Gemessene Zeiten in Sekunden. Dauer: jeweils 10 Perioden
T_mess = [8.4 8.3 8.4 8.4 8.3 8.3 8.2 8.3 8.3 8.3];
T = T_mess/10;                  % Umrechnen auf eine Periode
T = mean(T);                    % Mittelwert (MW) bilden

dT_reakt = 0.3/10;              % Fehler der Reaktionszeit für eine Periode
t95 = 2.26;                     % Faktor für stat. Sicherheit (95%)
dT_stat = t95*std(T_mess)/sqrt(length(T_mess));  % Stat. Unsicherheit des MW
dT = dT_reakt + dT_stat;
```

Noch fehlen die Korrekturen zur Dämpfung bzw. Grosse Amplituden

```
phi_0 = 10/180*pi;              % Anfangsauslenkung ca. 10ř (in Bogenmass)
phi_i = phi_0;                  % Amplitude von phi_i ca. 10ř
phi_ii = 9.5/180*pi;            % Darauffolgende Amplitude phi_(i+1) ca. 9.5ř

Td = T * (1 + 1/2 * (1/(2*pi) * log(phi_i/phi_ii)^2));
Err_d = Td/T;                   % Rel. Fehler von T bezüglich der Dämpfung

Tphi0 = T * (1 + 1/4 * (sin(phi_0/2))^2);
Err_phi = Tphi0/T;              % Rel. Fehler von T bezüglich grossen Amplituden

% Ergebnisse der Beiträge
fprintf('Beitrag der Dämpfung (V3): %g %% \n',(1-Err_d)*100);
fprintf('Beitrag von grossen Amplituden (V3): %g %% \n',(1-Err_phi)*100);
```

```
Beitrag der Dämpfung (V3): -0.0209368 %
Beitrag von grossen Amplituden (V3): -0.189903 %
```

Das Trägheitsmoment J_3 kann nun berechnet werden, die Periodendauer wird vorher noch korrigiert bezüglich grosser Auslenkungen. Die Dämpfung kann hierbei vernachlässigt werden, da der Beitrag kleiner 0.1% ist.

```
T = Err_phi * T;
dT = Err_phi * dT;
J3 = (T^2/(4*pi^2) * g-s)*m_rad*s;
```

Partielle Ableitungen der Gleichung zu J_3

$$\frac{\partial J_3}{\partial T} = \frac{T\, g\, m_{rad}\, s}{2\,\pi^2}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial m_{rad}} = -s\left(s - \frac{T^2\, g}{4\,\pi^2}\right)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial s} = -m_{rad}\, s - m_{rad} \left(s - \frac{T^2\, g}{4\, \pi^2} \right)$$

Diese Terme werden analog zu obigen Verfahren addiert:

```
dJ3 = abs(2*T*g*m_rad*s/(4*pi^2))*dT + ...
    abs(T^2*g*s/(4*pi^2)-s^2)*dm_rad + ...
    abs(T^2*g*m_rad/(4*pi^2) - 2*m_rad*s)*ds;

% Ergebnis (ungerundet)
fprintf('Ergebnis zu Verfahren 3: J_3 = (%g +/- %g) kg*m^2 \n',J3,dJ3);
```

```
Ergebnis zu Verfahren 3: J_3 = (0.0128995 +/- 0.00501177) kg*m^2
```

Fazit

Die Messungen zu den jeweiligen Verfahren uberlappen gut im Rahmen der Messunsicherheiten. Die Abschätzung des Trägheitsmoments des Speichenrades ist etwas zu hoch geraten, allerdings wurden auch keine Unsicherheiten mit angegeben. Man müsste das Modell verfeinern, was aber einen höheren Rechenaufwand mit sich bringt.

Ansonsten stimmt zumindest die Grössenordnung des gemessenen Trägheitsmoments mit dem berechneten überein.

Copyright