



Titel **Untersuchung des Zeeman-Effekts an der roten Cadmium-Linie zur Bestimmung des Bohrschen Magnetons**

Autor Denis Nordmann

Version 30. April 2015, 23:50

Zitierung D. Nordmann. *Untersuchung des Zeeman-Effekts an der roten Cadmium-Linie zur Bestimmung des Bohrschen Magnetons*. URL: <http://physik.co-i60.com> (abgerufen am: <Datum>)

Copyright  Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen	2
2.1	Klassische Deutung des normalen Zeeman-Effekts nach Lorentz	2
2.2	Halbklassische Deutung des normalen Zeeman-Effekts	3
2.3	Elektronenspin	4
2.4	Anomaler Zeeman-Effekt	5
2.5	Paschen-Back-Effekt	6
2.6	Auswahlregeln	6
2.7	Termbezeichnung und Termschema	7
2.8	Kopplungsmechanismen	7
	2.8.1 Die LS -Kopplung	8
	2.8.2 Die jj -Kopplung	8
2.9	Das Fabry-Pérot-Interferometer	8
3	Versuchsaufbau und -durchführung	11
3.1	Teil 1: Messung des Magnetfeldes in Abhängigkeit des Spulenstroms	11
3.2	Teil 2: Bestimmung des Bohrschen Magnetons	11
3.3	Verwendete Geräte	11
4	Versuchsauswertung	12
4.1	Teil 1: Magnetfeldmessung	12
4.2	Teil 2: Linienaufspaltung und Bohrsches Magneton	13
	4.2.1 Linienaufspaltung in longitudinaler Anordnung	13
	4.2.2 Linienaufspaltung in transversaler Anordnung	14
	4.2.3 Ermittlung des Bohrschen Magnetons	16
5	Zusammenfassung	19
5.1	Diskussion der Ergebnisse	19

1 Einleitung

Werden Atome in einem externen magnetischen Feld angeregt, so lassen sich mit einem Fabry-Pérot-Interferometer Aufweitungen der Interferenzmuster beobachten. Dies wird als Zeeman-Effekt bezeichnet. Der „normale“ Zeeman-Effekt kann in einem halbklassischen Modell mithilfe der Elektrodynamik erklärt werden – für die vollständige Erklärung bedarf es der Quantenmechanik. Im folgenden Experiment wurden Zeeman-Aufspaltungen von Cadmium bei verschiedenen magnetischen Flussdichten beobachtet und mittels der ausgewerteten Interferogramme das Bohrsche Magneton μ_B bestimmt.

2 Grundlagen

2.1 Klassische Deutung des normalen Zeeman-Effekts nach Lorentz

Die Aufspaltung von Spektrallinien wurde erstmals von P. Zeeman 1896 beobachtet. Die Theorie hierzu lieferte Lorentz bereits wenige Jahre später im Einklang mit der klassischen Elektrodynamik. Hierzu wurde ein Elektron betrachtet, welches in einem externen Magnetfeld \vec{B} um den Atomkern eine oszillierende Bewegung durchführt. Das Elektron im Modell kann dadurch als ein System von drei Ersatz-Oszillatoren angenommen werden.

Das Elektron, welches parallel zu \vec{B} oszilliert, erfährt keine Kraft durch das Magnetfeld, d.h. seine Frequenz bleibt unverändert.

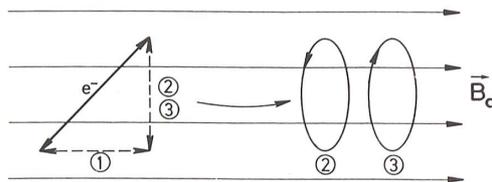


Abbildung 1: Klassische Deutung des Zeeman-Effekts als Modell von drei Ersatz-Oszillatoren [3, S. 214]

Die zirkular schwingenden Ersatzelektronen werden beim Einschalten des Feldes je nach Umlaufrichtung beschleunigt oder verzögert, das Ersatzelektron Φ in Abb. 1, welches parallel zu \vec{B} oszilliert, erfährt keine Kraft und somit auch keine Frequenzänderung. Die Kreisfrequenz der Ersatzelektronen $\textcircled{2}$ und $\textcircled{3}$ wird dabei um den Betrag

$$\delta\omega = \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot B \quad (1)$$

erhöht bzw. erniedrigt. Die Berechnung der Frequenzverschiebung $\delta\omega$ erfolgt auf dem folgenden Wege: Ohne äußeres Magnetfeld ist die Kreisfrequenz der Ersatzelektronen ω_0 . Es herrscht ein Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Coulombkraft, also gilt

$$m\omega_0^2 \vec{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|}. \quad (2)$$

Im homogenen äußeren Feld \vec{B} in z -Richtung wirkt die Lorentzkraft, welche zu den Bewegungsgleichungen (im kartesischen Koordinatensystem)

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x - ey\vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$m\ddot{y} + m\omega_0^2 y + ex\vec{B} = 0 \quad (4)$$

$$m\ddot{z} + m\omega_0^2 z = 0 \quad (5)$$

führt. Die Lösung der Gl. (5) ist $z = z_0 \cdot e^{i\omega_0 t}$, d.h. die Frequenz des in z -Richtung schwingenden Elektrons bleibt unverändert. Die Gleichungen (3) und (4) werden durch die Ausdrücke $u = x + iy$ sowie $v = x - iy$ substituiert und mit

$$u = u_0 \exp \left[i \left(\omega_0 - \frac{eB}{2m} \right) t \right] \quad (6)$$

$$v = v_0 \exp \left[i \left(\omega_0 + \frac{eB}{2m} \right) t \right] \quad (7)$$

gelöst, vorausgesetzt es sei $eB/2m \ll \omega_0$.

Die Gleichungen (6) und (7) sind die Bewegungsgleichungen für eine links- und eine rechts-zirkuläre Schwingung mit der Frequenz $\omega_0 \pm \delta\omega$ mit $\delta\omega = eB/2m$. Die Ersatzelektronen $\textcircled{2}$ und $\textcircled{3}$ emittieren/absorbieren zirkular polarisiertes Licht mit der Frequenz $\omega_0 \pm \delta\omega$.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Aufspaltungsbild des normalen Zeeman-Effekts im klassischen Sinne richtig wiedergegeben wird. Die dabei auftretende Frequenzänderung ist

$$\delta\omega = \frac{e}{2m_0} \cdot B \quad (8)$$

Über die Strahlungscharakteristik der Ersatzelektronen lässt sich sagen, dass das Elektron $\textcircled{1}$ die Strahlungscharakteristik eines Hertzschen Dipols besitzt, welches parallel in Richtung von \vec{B} schwingt. Diese Ausstrahlung ist die sog. π -Komponente, die Ausstrahlcharakteristik der Elektronen $\textcircled{2}$ und $\textcircled{3}$ heißt σ^+ bzw. σ^- -Licht, wobei σ für senkrecht und die Indizes $+/-$ für Frequenzerhöhung/-erniedrigung stehen. Das σ^+ -Licht ist rechts-zirkular polarisiert, σ^- -Licht links-zirkular [3, S. 214ff].

2.2 Halbklassische Deutung des normalen Zeeman-Effekts

Zur Erklärung des normalen Zeeman-Effekts wird zunächst ein halbklassisches Modell des Wasserstoffatoms angewandt, mit der Bedingung, dass der Drehimpuls quantisiert ist, also $|\vec{\ell}| = \sqrt{\ell(\ell+1)}$ gilt.

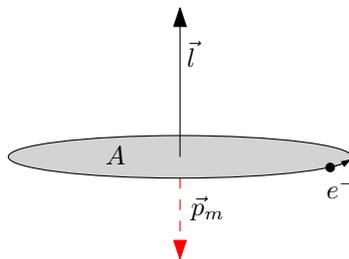


Abbildung 2: Zum halbklassischen Modell des Wasserstoffatoms [1, S. 160]

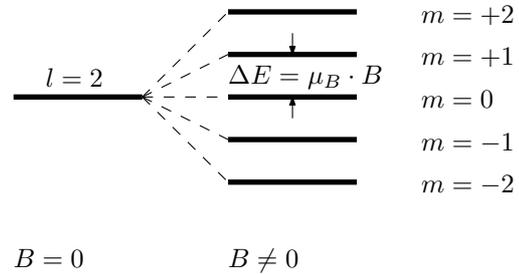


Abbildung 3: Zeeman-Aufspaltung mit $\ell = 2$ mit/ohne Magnetfeld [1, S. 161]

In diesem Modell bewegt sich das Elektron um den Atomkern auf einer Kreisbahn mit der Frequenz $\nu = v/(2\pi r)$ und verursacht einen Kreisstrom

$$I = -e \cdot \nu = -\frac{e \cdot v}{2\pi r} \quad (9)$$

und somit auch ein magnetisches Moment

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{A} = -\frac{1}{2} e v r \cdot \vec{n}, \quad (10)$$

mit dem senkrecht auf der Bahnebene stehenden Vektor $\vec{A} = \pi r^2 \cdot \vec{n}$. Der Bahndrehimpuls ist gegeben mit $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e v r \cdot \vec{n}$. Formt man diesen Ausdruck nach \vec{n} um und setzt ihn in Gl. (10) ein, so ist der Zusammenhang zwischen dem magnet. Moment und dem Drehimpuls

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{\ell} \quad (11)$$

In einem externen Magnetfeld \vec{B} haben wir die potentielle Energie

$$E_{pot} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = +\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{\ell} \cdot \vec{B} \quad (12)$$

Betrachtet man das Magnetfeld in z -Richtung, ergibt sich aufgrund von $\ell_z = m \cdot \hbar$

$$E_{pot} = \frac{e}{2m_e} \cdot m \cdot \hbar \cdot B \Rightarrow \Delta E_{pot} = \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot m \cdot B \quad (13)$$

Der Ausdruck $e\hbar/2m_e$ wird als Bohrsches Magneton μ_B bezeichnet und hat den Wert $\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24} J/T$. In einem äußeren Magnetfeld werden die Energieniveaus aufgrund des mit dem Bahndrehimpuls $|\vec{\ell}| = \sqrt{\ell(\ell+1)\hbar}$ verknüpften magnetischen Moment in $(2\ell+1)$ Komponenten aufgespalten. Diesen Effekt nennt man den normalen Zeeman-Effekt.

Aufgrund des zylindrischen Magnetfelds wird die Kugelsymmetrie im Coulombfeld erniedrigt. Der Drehimpuls $\vec{\ell}$ ist nicht mehr zeitlich konstant, weil ein Drehmoment $\vec{D} = \vec{\mu}_l \times \vec{B}$ auf das Elektron einwirkt. Für ein Feld B_z in z -Richtung präzediert $\vec{\ell}$ um die z -Achse. Die Komponente ℓ_z kann dabei Werte $\ell_z = m \cdot \hbar$ mit $m = -\ell \dots +\ell$ annehmen, der Betrag von $\vec{\ell}$ nimmt ebenfalls nur bestimmte Werte $|\vec{\ell}| = \sqrt{\ell(\ell+1)\hbar}$ an.

Laut der obigen Theorie ist die Zeeman-Aufspaltung gemäß $\Delta E = \mu_B \cdot B$ von den Quantenzuständen n und ℓ unabhängig. Experimentelle Befunde (genaue spektroskopische Messungen) haben jedoch ergeben, dass Effekte wie Feinstrukturaufspaltung auftreten. Erst mit der Entdeckung des Elektronenspins durch Stern und Gerlach konnte das Wasserstoffspektrum vollständig beschrieben werden [1, S. 160ff].

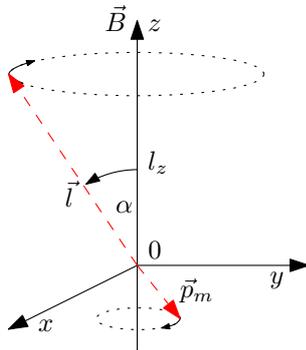


Abbildung 4: Klassisches Vektormodell des Zeeman-Effekts [1, S. 161]

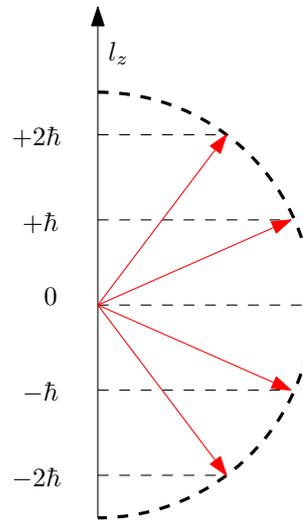


Abbildung 5: Mögliche Projektionen von $\vec{\ell}$ auf die z -Achse [1, S. 161]

2.3 Elektronenspin

Im Stern-Gerlach-Experiment (1921) wurden Silberatome im Vakuum verdampft, zu einem Strahl kollimiert und durch ein inhomogenes Magnetfeld geführt. Da Silberatome nach außen hin einen Grundzustand von $\ell = 0$ haben, sollte eine Intensitätsverteilung gemäß der klassischen Physik beobachtet werden. Stattdessen wurde eine Aufspaltung des Strahls in zwei Komponenten beobachtet.

Dies konnten Goudsmit und Uhlenbeck 1925 erklären, indem sie den Elektronenspin \vec{s} mit dem magnetischen Moment $\vec{\mu}_s = \gamma \cdot \vec{s}$ verknüpft haben. Der Betrag des Elektronenspins ist

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)\hbar} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\hbar \quad (14)$$

und seine beiden Komponenten in z -Richtung sind $s_z = \pm 1/2\hbar$. Die Proportionalitätskonstante γ ist das gyromagnetische Verhältnis, eine für jede Teilchenart charakteristische Naturkonstante [1, S. 168ff].

Für $s = 0$ (nur Bahnmagnetismus) ist $\vec{j} = \vec{\ell}$ und man erhält $g_j = 1$. Für $\ell = 0$ (reiner Spinmagnetismus) ist $g_j \approx 2$. Tragen Spin- und Bahnmagnetismus beide zum magnetischen Moment bei, so liegt g_j zwischen $2/3$ und 2 . Der Landé-Faktor g_j ist vom Zustand (j, ℓ) abhängig. Dadurch ist die Aufspaltung für die verschiedenen Niveaus (j, ℓ) ebenfalls unterschiedlich im Gegensatz zum normalen Zeeman-Effekt. Das Aufspaltungsbild der Spektrallinien ist komplizierter [1, S. 172ff].

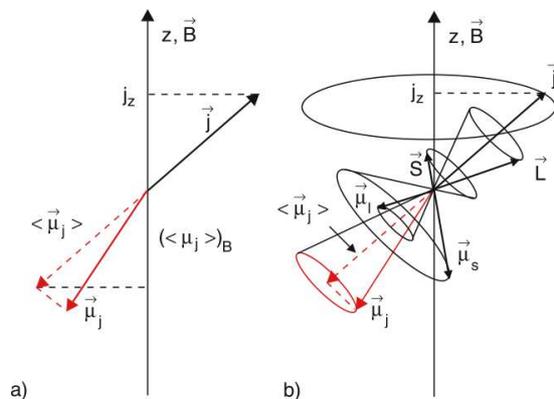


Abbildung 8: Projektion von $\vec{\mu}_j$ auf die Richtung von \vec{j} (a) und die Präzession aller magnet. Momente und Drehimpulse um die Magnetfeldrichtung (b) [1, S. 173]

2.5 Paschen-Back-Effekt

Bei hinreichend großen Magnetfeldstärken gehen der normale/anomale Zeeman-Effekt in den sog. Paschen-Back-Effekt über. Bei "schwachen" Magnetfeldern ist die Kopplung zwischen dem Spin- und Bahnmoment stärker als die alleinige Kopplung von Spin- oder Bahnmoment mit dem äußeren Magnetfeld. Ist das Magnetfeld stark genug, entkoppeln $\vec{\ell}$ und \vec{s} und präzedieren einzeln um \vec{B} . Die Quantenzahl \vec{j} verliert somit ihre Bedeutung – dieser Grenzfall wird auch Paschen-Back-Effekt genannt [3, S. 221].

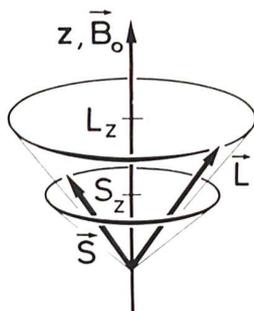


Abbildung 9: Bei grossen Magnetfeldern stellen sich der Spin S und der Bahndrehimpuls L einzeln relativ zu \vec{B} auf, der Gesamtdrehimpuls \vec{J} ist nicht definiert. [3, S. 222]

2.6 Auswahlregeln

Geht ein Elektron im Atom von einem erlaubten Energiezustand in einen anderen, wird elektromagnetische Strahlung in Form eines Photons emittiert (bzw. absorbiert). Diese Übergänge führen zu Spektrallinien, die für das jeweilige Atom charakteristisch sind. Es gelten folgende Auswahlregeln:

- Für Eielektronensysteme gilt $\Delta \ell = \pm 1$
- Für Mehrelektronensysteme bei $\vec{L} - \vec{S}$ -Kopplung ist $\Delta L = \pm 1$, wobei gerade Zustände nur mit ungeraden kombinieren
- $\Delta M = 0, \pm 1$, wobei $\Delta M = 0$ ist linear polarisiertes Licht, $\Delta M = \pm 1$ ist σ^+ bzw. σ^- zirkular polarisiertes Licht

- Für "leichte" Atome gilt $\Delta S = 0$. Für "schwere" Atome (bei großer Spin-Bahn-Kopplung) gibt es Ausnahmen
- $\Delta J = 0, \pm 1$, allerdings ist der Übergang $J = 0 \rightarrow J = 0$ verboten

Bei einem Übergang muss sich die Drehimpulsquantenzahl um ± 1 ändern, da das emittierte/absorbierte Photon ebenfalls einen Spin von ± 1 hat [7, S. 1386] [1, S. 242].

2.7 Termbezeichnung und Termschema

Für die Bezeichnung der Quantenzustände eines Atoms besteht eine besondere Nomenklatur. Diese wird in der Form

$$n^{2S+1}L_J \quad (20)$$

ausgedrückt. Die Bedeutung der einzelnen Indizes soll im Folgenden erklärt werden. n ist die Hauptquantenzahl ($n = 1, 2, 3, \dots$). Der große Buchstabe L steht für die Bahndrehimpulsquantenzahl. In der Spektroskopie werden statt Zahlenwerten $\ell = 0, 1, 2, \dots$ alphabetische Buchstaben $S(\ell = 0), P(\ell = 1), D, F, G, \dots$ verwendet. Die Großschreibweise deutet an, dass es sich um ein Mehrelektronensystem handelt, bei Einnelektronensystemen werden auch kleine Buchstaben s, p, d, f, \dots verwendet. Der Buchstabe J ist die Quantenzahl für den Gesamtdrehimpuls, also $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$. Die Multiplizität $2S + 1$ gibt an die Anzahl der zu einem Multiplett (L, S, J) von Energieniveaus gehörenden Terme an. Dabei ist

- $S \leq L$: Multiplizität $2S + 1$,
- $S > L$: Multiplizität $2L + 1$.
- $S = 0$: Multiplizität 1, Singulettssystem,
- $S = \frac{1}{2}$: Multiplizität 2, Dublettsystem,
- $S = 1$: Multiplizität 3, Triplettssystem.

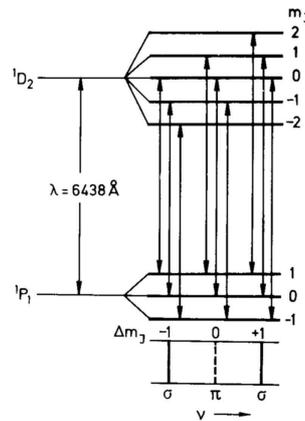


Abbildung 10: Termschema des normalen Zeeman-Effekts am Cadmiumatom [3, S. 217]

Quellen: [1, S. 170ff] [6, S. 776]

2.8 Kopplungsmechanismen

Man unterscheidet zwei Grenzfälle der Drehimpulskopplung: die LS - oder Russell-Saunders-Kopplung und die jj -Kopplung.

2.8.1 Die LS -Kopplung

Bei Mehrelektronensystemen mit mehreren Valenzelektronen sind die Spektren wesentlich komplizierter als bei Eielektronensystemen wie z.B. beim Wasserstoffatom oder dem He^+ -Ion. Bei der LS -Kopplung handelt es sich um ein Kopplungsschema für schwache Spin-Bahn-Wechselwirkung, bei dem die Bahndrehimpulse der Valenzelektronen zu einem Gesamtbahndrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i \quad \text{mit} \quad |\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar \quad (21)$$

und die Spins der Elektronen zu einem Gesamtspin

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^N \vec{s}_i \quad \text{mit} \quad |\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar \quad (22)$$

koppeln. Der Gesamtdrehimpuls \vec{J} ist dann die Vektorsumme von \vec{L} und \vec{S}

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad \text{mit} \quad |\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar. \quad (23)$$

Die LS -Kopplung wird vorwiegend zur Spektralanalyse von leichten Atomen verwendet [3, S. 308] [6, S. 775].

2.8.2 Die jj -Kopplung

Seltener als die LS -Kopplung ist die jj -Kopplung, bei der zunächst wie bei einem Eielektronensystem die $\vec{\ell}_i$ und \vec{s}_i zu einem Drehimpuls \vec{j} koppeln, die wiederum alle zusammen \vec{J} bilden. Die jj -Kopplung ist ein Kopplungsschema für starke Spin-Bahn-Wechselwirkung, die vorwiegend zur Spektralanalyse von sehr schweren Atomen hoher Ordnungszahl Z (z.B. Quecksilber) verwendet wird [6, S. 776].

2.9 Das Fabry-Pérot-Interferometer

Das Fabry-Pérot-Interferometer (FPI) ist ein Aufbau aus zwei stark reflektierenden Flächen, die im Abstand d zueinander planparallel angeordnet sind. Zwischen diesen Flächen kommt es zur Vielfachreflexion des einfallenden Lichtes. Durch das Zusammenwirken verschiedener Strahlenbündel entstehen bei der Einstrahlung von monochromatischem Licht Interferenzmaxima, die als helle Kreise erscheinen.

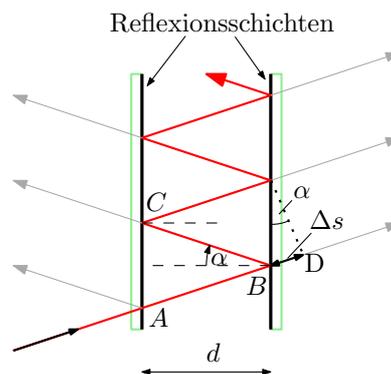


Abbildung 11: Prinzipskizze des Fabry-Pérot-Interferometers [2][5, S. 198].

Der Gangunterschied Δs zwischen zwei benachbarten Strahlen ist

$$\Delta s = \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{BD} \quad (24)$$

Des Weiteren lässt sich für den Gangunterschied Δs schreiben

$$\Delta s = 2 \cdot \overline{AB} - \overline{AC} \cdot \sin \alpha \quad (25)$$

$$= 2 \left(\frac{d}{\cos \alpha} \right) - 2d \cdot \tan \alpha \cdot \sin \alpha \quad (26)$$

$$= 2 \left(\frac{d}{\cos \alpha} \right) - 2d \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \quad (27)$$

$$= \left(\frac{2d}{\cos \alpha} \right) \cdot \underbrace{(1 - \sin^2 \alpha)}_{=\cos^2 \alpha} \quad (28)$$

$$= 2d \cdot \cos \alpha \quad (29)$$

vorausgesetzt, Brechungseffekte im Glas bzw. im Medium zwischen den Reflexionsschichten werden vernachlässigt ($n = 1$). Ansonsten gilt

$$\Delta s = 2dn \cdot \cos \alpha. \quad (30)$$

Die Interferenzbedingung ist erfüllt, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge λ ist, also der Forderung

$$z \cdot \lambda = 2 \cdot d \cdot \cos \alpha, \quad z \in \mathbb{N} \quad (31)$$

genügt. Erfüllt α die Bedingung aus Gleichung (30), so lassen sich die bereits erwähnten Interferenzen in Form von Ringen beobachten. Die Ordnung des innersten Rings ($\alpha \approx 0$) ist gegeben durch

$$z_0 = \frac{2d}{\lambda}. \quad (32)$$

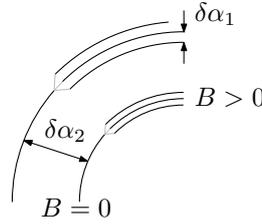


Abbildung 12: Angedeutetes Interferenzmuster ohne/mit Magnetfeld [2]

Für unsere Auswertung werden die Abstände $\delta\alpha_1$, die bei der Aufspaltung der Ringe im Magnetfeld auftreten, mit den Abständen benachbarter Ringe ohne B -Feld $\delta\alpha_2$ verglichen. Hierzu wird das totale Differential von Gl. (31) gebildet, zunächst mit festgehaltener Ordnung

$$z \cdot d\lambda = -2 \cdot d \cdot \sin \alpha \cdot \delta\alpha_1, \quad (33)$$

anschließend mit festgehaltener Wellenlänge

$$\lambda \cdot dz = -2 \cdot d \cdot \sin \alpha \cdot \delta\alpha_2. \quad (34)$$

Die Division der Gleichungen (33) und (34) ergibt

$$z_0 = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2}, \quad (35)$$

wobei wir für $z = z_0$ und für $dz = 1$ nur die benachbarten Linien betrachten.

Gleichung (35) lässt sich nun mit den Gleichungen zur Energie und Wellenlänge verknüpfen, nämlich

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{d\lambda} = -\frac{hc}{\lambda^2}. \quad (36)$$

Der Abstand von zwei aufgespaltenen Ringen/Energieniveaus (Abb. 3) beträgt

$$\Delta E = \mu_B \cdot B, \quad (37)$$

was im Falle des normalen Zeeman-Effekts zu

$$\mu_B \cdot B = -\frac{hc}{\lambda^2} \cdot d\lambda \quad \Rightarrow \quad \mu_B \cdot B = -\frac{hc}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda}{\frac{2d}{\lambda}} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2} \quad (38)$$

und anschließend zu

$$\mu_B = \frac{hc}{2d \cdot B} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2} \quad (39)$$

führt. Im Falle des anomalen Zeeman-Effekts gilt für μ_B :

$$\mu_B = \frac{hc}{2d \cdot B \cdot \Delta g_{eff}} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2}. \quad (40)$$

Die rote Cd-Linie ($\lambda = 643,8nm$) stellt den Übergang $S = 0, L = 2, J = 2 \rightarrow S = 0, L = 1, J = 1$ dar. Das Δm_j für das obere Niveau ist $m_j = +1$, für das untere Niveau $m'_j = -1$. Damit erhalten wir folgendes Δg_{eff} :

$$\Delta g_{eff} = g \cdot m_j - g' \cdot m'_j \quad (41)$$

$$= \left(1 + \frac{2(2+1) - 2(2+1)}{2 \cdot 2(2+1)}\right) \cdot (+1) - \left(1 + \frac{1(1+1) - 1(1+1)}{2 \cdot 1(1+1)}\right) \cdot (-1) \quad (42)$$

$$= 1 - (-1) \quad (43)$$

$$\Delta g_{eff} = 2 \quad (44)$$

Quellen zum Abschnitt: [2] [4, S. 678] [5, S. 198]

3 Versuchsaufbau und -durchführung

3.1 Teil 1: Messung des Magnetfeldes in Abhängigkeit des Spulenstroms

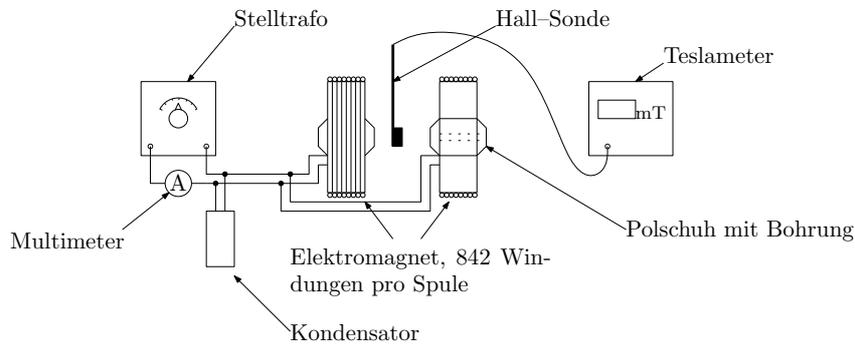


Abbildung 13: Schematischer Versuchsaufbau zur Messung der Induktivität

Die beiden Spulen werden in paralleler Anordnung angeschlossen. Zusätzlich wird ein Kondensator, der zur Unterdrückung der Brummspannung verwendet wird, parallel zu den Spulen geschaltet. Zwischen den Polschuhen wird eine tangentiale Hall-Sonde gebracht, mit der die Messung der magnetischen Flussdichte in Abhängigkeit des Spulenstromes durchgeführt wird. Die magnet. Flussdichte wird gegen den Spulenstrom grafisch aufgetragen und eine Ausgleichsrechnung durchgeführt.

3.2 Teil 2: Bestimmung des Bohrschen Magnetons

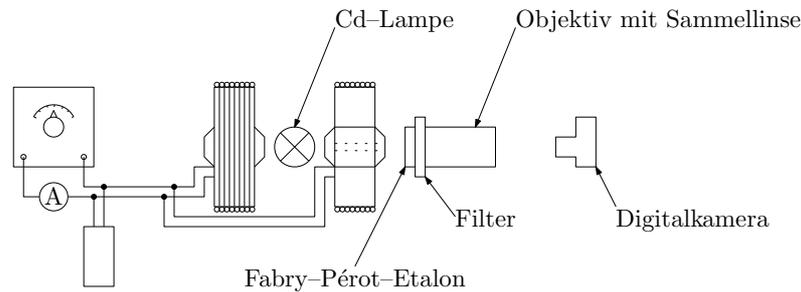


Abbildung 14: Aufbau zum Teil 2

Die Hall-Sonde wird nun durch eine Cadmium-Dampflampe ersetzt. Das Fabry-Pérot-Interferometer (FPI) wird mit einem roten Farbfilter bestückt (Cd-Linie bei $\lambda = 643,8 \text{ nm}$) und justiert. Die roten Interferenzringmuster werden in transversaler bzw. longitudinaler Anordnung bei unterschiedlichen Strömen fotografiert. Anhand der Linienaufspaltung bei maximaler Stromstärke wird das Bohrsche Magneton μ_B bestimmt.

3.3 Verwendete Geräte

- Helmholtz-Spulenpaar mit 2 Polschuhen (durchbohrt), 842 Windungen pro Spule
- Stelltrafo zum Betrieb der Helmholtzspulen
- Elektrolyt-Kondensator ($C = 22000 \mu\text{F} = 22 \text{ mF}$)
- Digitales Multimeter
- Hall-Sonde (tangential) mit Teslameter
- Cadmium-Lampe inkl. Netzgerät
- Fabry-Pérot-Interferometer, Farbfilter (rot)
- Digitalkamera

4 Versuchsauswertung

4.1 Teil 1: Magnetfeldmessung

Die Magnetfeldmessung erfolgte mit einer tangentialen Hall-Sonde, der Strom wurde mit einem digitalen Multimeter (3 Digits) gemessen. Die Hersteller geben eine Genauigkeit der Magnetfeldmessung mit $\Delta B = \pm 2\%$ und die Strommessung im Bereich $0 \text{ A} \leq I \leq 10 \text{ A}$ mit $\Delta I = \pm 2.5\%$ an.

Messwert	Spulenstrom I [A]	Magnetfeld B [mT]	Messwert	Spulenstrom I [A]	Magnetfeld B [mT]
1	0	0	12	4.29	476
2	0.26	26	13	4.78	534
3	0.54	56	14	5.29	590
4	0.87	94	15	5.81	645
5	1.41	149	16	6.14	680
6	1.79	190	17	6.48	717
7	2.19	234	18	6.85	756
8	2.61	286	19	7.29	799
9	3.18	349	20	7.74	838
10	3.6	395	21	8.11	867
11	4	441			

Tabelle 1: Messwerte aus der Magnetfeldmessung

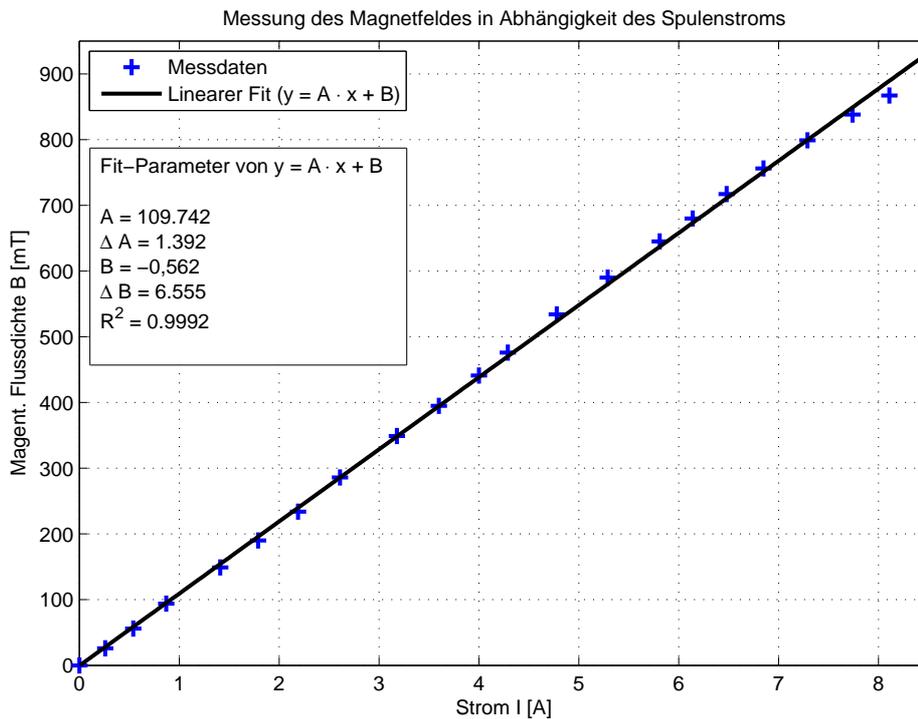


Abbildung 15: Grafische Auftragung der Messwerte inkl. Fit

Ergebnis Für die Modellgleichung $y = Ax + B$ haben wir folgende Fitparameter berechnet:

$$A = (109.7 \pm 1.4) \frac{\text{mT}}{\text{A}}$$

$$B = (-0.6 \pm 6.6) \text{ mT}$$

Der Vertrauensbereich für den Erwartungswert ist mit einer statistischen Sicherheit von 95% angegeben.

4.2 Teil 2: Linienaufspaltung und Bohrsches Magnetron

Die Linienaufspaltungen wurden bei unterschiedlichen Strömen mittels einer einfachen Digitalkamera aufgenommen. Die Parameter waren

- ca. 6 – 8facher optischer Zoom
- ISO 100
- Belichtungszeit 1/20 s

Die Bildbearbeitung erfolgte mit dem Open Source Programm GIMP v2.8 (GNU Image Manipulation Program). Die Bearbeitungsschritte zur besseren Darstellung waren

- Ausschneiden des Bildes auf eine Größe von etwa 1200 px × 1200 px (`crop image`)
- Umwandlung in ein Graustufenbild (`desaturate`)
- Negativ (`invert`)
- Weißabgleich (`white balance`)

Die Vermessung der Pixel erfolgte mit dem Image Processing Tool `imtool` aus MATLAB.

4.2.1 Linienaufspaltung in longitudinaler Anordnung

Ohne externes Magnetfeld sieht man zunächst rotfarbene, konzentrische Interferenzringe, welche nach außen hin schmaler werden und an Intensität verlieren. Mit zunehmender Stärke des Magnetfelds (d. h. mit der Erhöhung des Spulenstromes) werden immer mehr Ringe sichtbar, wobei die Aufspaltung der ursprünglichen Ringe wie erwartet in einem Dublett erfolgt. Der Strom I wurde von 0 A in 2 A-Schritten bis auf etwa 8 A erhöht.

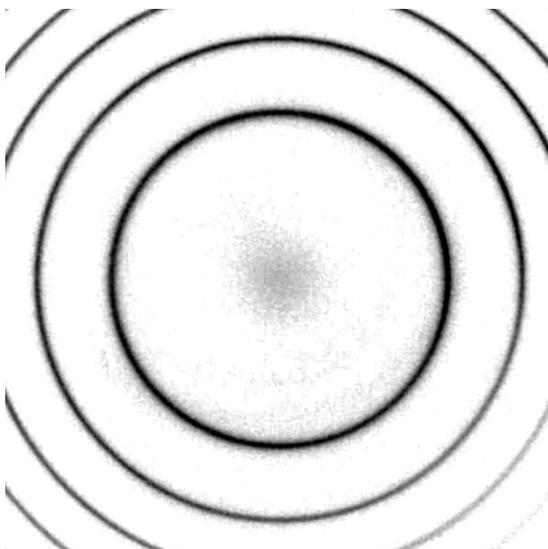


Abbildung 16: Longitudinal, $I = 0$ A

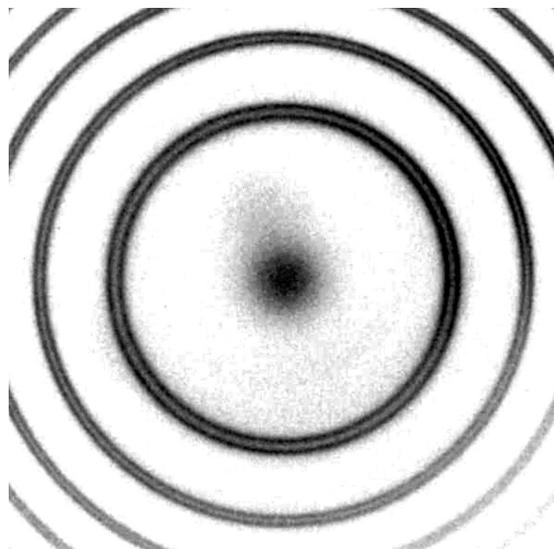


Abbildung 17: Longitudinal, $I = 2,00$ A

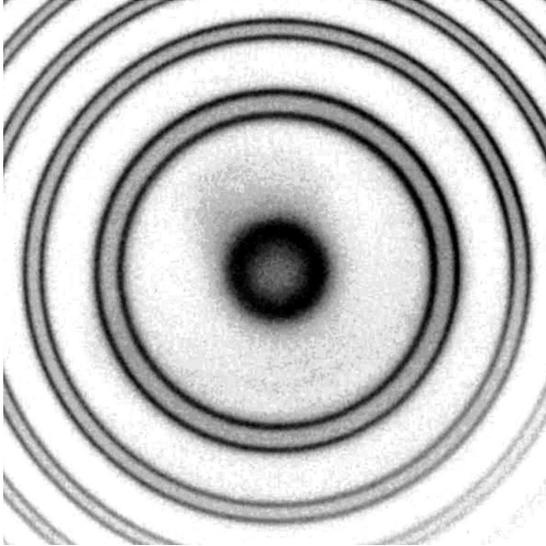


Abbildung 18: Longitudinal, $I = 4,17$ A

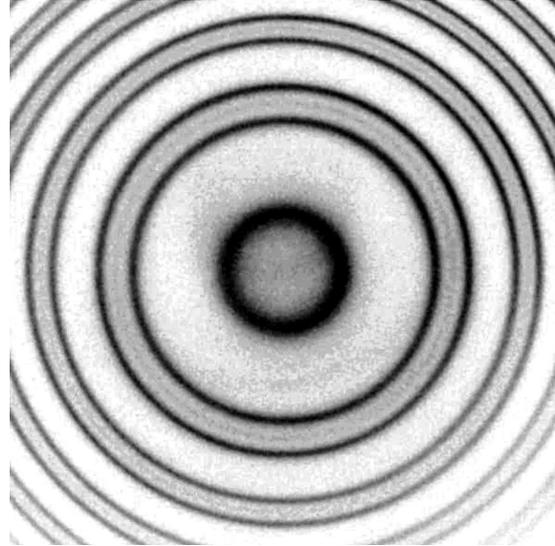


Abbildung 19: Longitudinal, $I = 6,06$ A

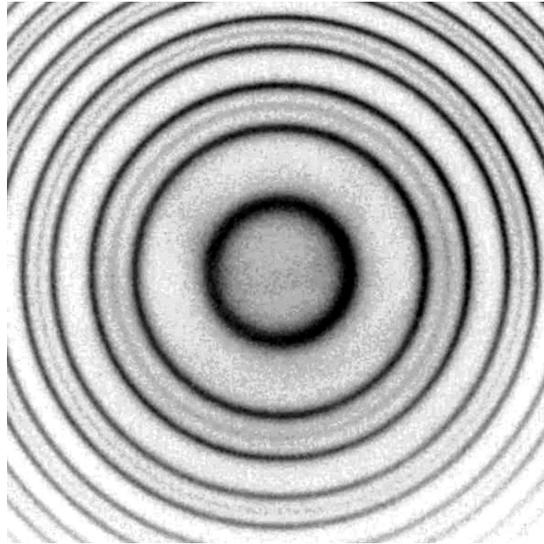


Abbildung 20: Longitudinal, $I = 8,03$ A

4.2.2 Linienaufspaltung in transversaler Anordnung

Ähnliches lässt sich in der transversalen Anordnung (Elektromagnet um 90° gedreht) beobachten, allerdings erfolgt die Aufspaltung der Ringe in einem Triplett.

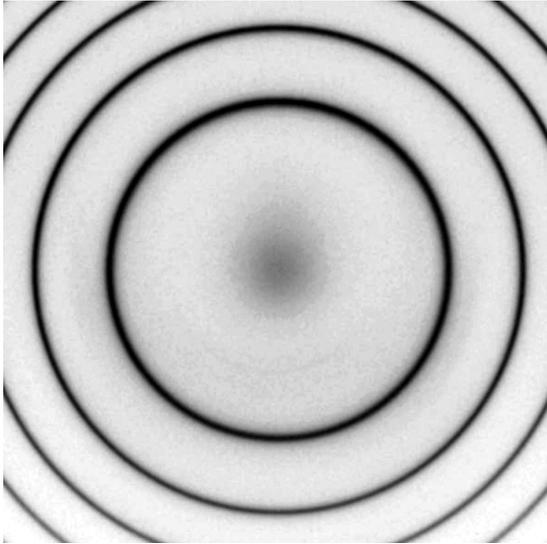


Abbildung 21: Transversal, $I = 0$ A

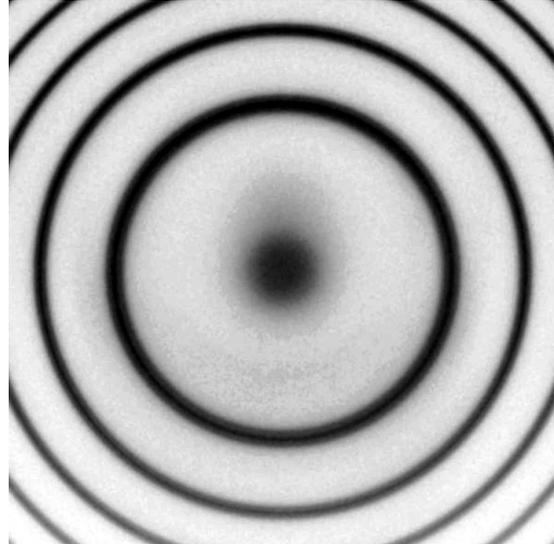


Abbildung 22: Transversal, $I = 2,13$ A

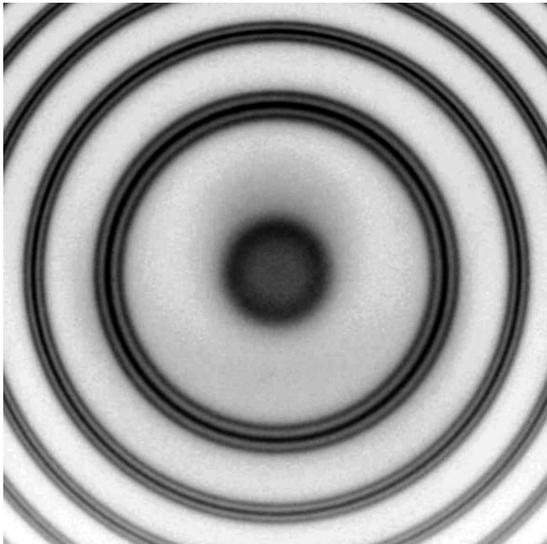


Abbildung 23: Transversal, $I = 3,97$ A

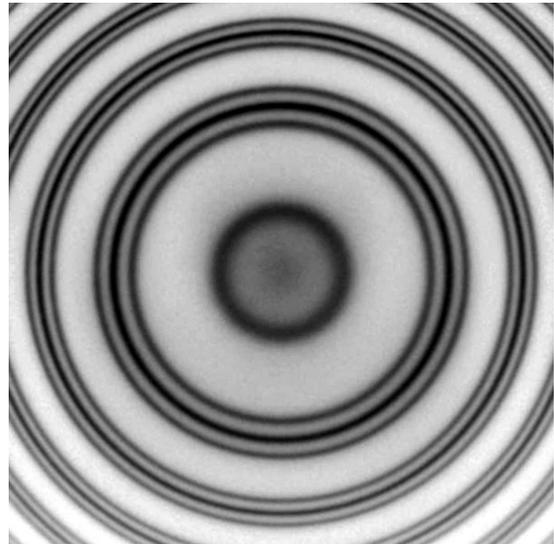


Abbildung 24: Transversal, $I = 6,05$ A

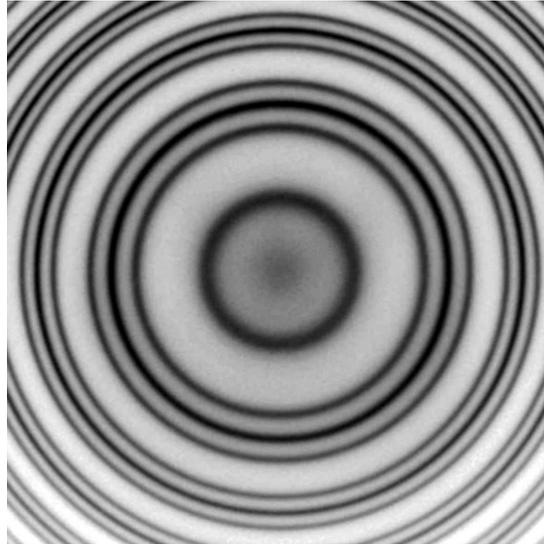


Abbildung 25: Transversal, $I = 8,06 \text{ A}$

4.2.3 Ermittlung des Bohrschen Magnetons

Zur Ermittlung des Bohrschen Magnetons werden die Aufnahmen bei maximalem Magnetfeld betrachtet. Die Aufspaltung ist dort am größten. Das Bohrsche Magneton ist gegeben gem. Gl. (39) mit

$$\mu_B = \frac{hc}{2d \cdot B} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2}$$

In dieser Gleichung sind h (Plancksches-Wirkungsquantum) und c (Vakuumlichtgeschwindigkeit) Naturkonstanten, der Plattenabstand d ist laut Hersteller $d = 3 \text{ mm}$ mit einer Planität von $\Delta d = \lambda/10 \approx 64 \text{ nm}$ (vernachlässigbar klein). Die magnet. Flussdichte B wird anhand des gemessenen Spulenstromes berechnet und die laterale Messunsicherheit beim Zählen der Pixel wird mit $\Delta\alpha = \pm 2$ geschätzt. Zur Auswertung wurden die Interferenzringe aus den Abbildungen 20 und 25 herangezogen.

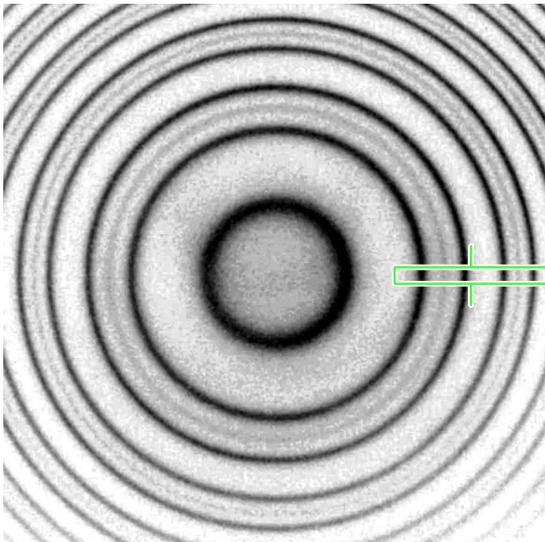


Abbildung 26: Longitudinale Anordnung, $I = 8,03 \text{ A}$

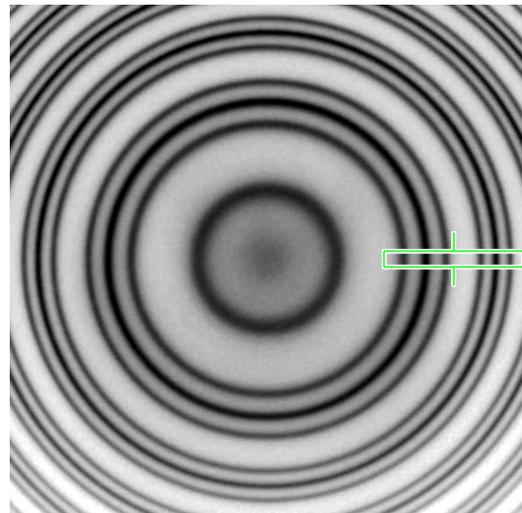


Abbildung 27: Transversale Anordnung, $I = 8,06 \text{ A}$

Der markierte Bereich wurde vergrößert (350% Zoom) und die Zahl der Pixel bestmöglich abgeschätzt.

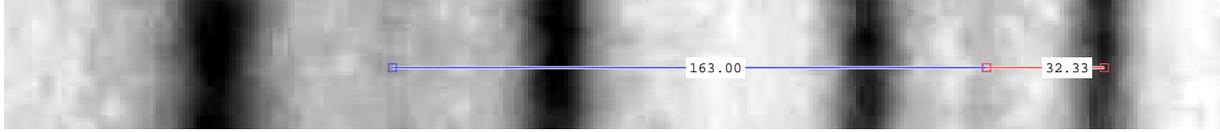


Abbildung 28: Longitudinal, $\delta\alpha_1 = 32$, $\delta\alpha_2 = 163$

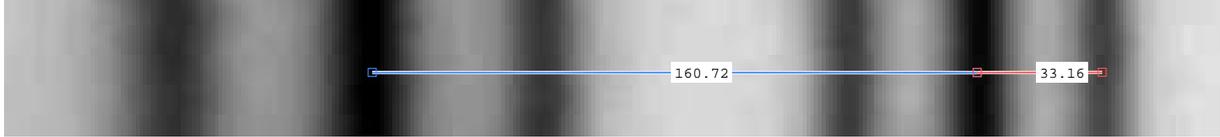


Abbildung 29: Transversal, $\delta\alpha_1 = 33$, $\delta\alpha_2 = 161$

Die partiellen Ableitungen der einzelnen Größen aus Gl. (39) sind

$$\frac{\partial\mu_B}{\partial d} = -\frac{hc}{2d^2 \cdot B} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2}$$

$$\frac{\partial\mu_B}{\partial B} = -\frac{hc}{2d \cdot B^2} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2}$$

$$\frac{\partial\mu_B}{\partial\delta\alpha_1} = \frac{hc}{2d \cdot B} \cdot \frac{1}{\delta\alpha_2}$$

$$\frac{\partial\mu_B}{\partial\delta\alpha_2} = -\frac{hc}{2d \cdot B} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2^2}$$

Der Gesamtfehler von μ_B wird gemäß dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz berechnet, also ist

$$\Delta\mu_B = \sqrt{\left(\frac{\partial\mu_B}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_B}{\partial B} \cdot \Delta B\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_B}{\partial\delta\alpha_1} \cdot \Delta\delta\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_B}{\partial\delta\alpha_2} \cdot \Delta\delta\alpha_2\right)^2} \quad (45)$$

Für den transversalen Zeeman-Effekt erhalten wir mit den folgenden Größen

$$h = 6,62607 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$d = (3,000000 \pm 0,000064) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta\alpha_1 = (33 \pm 2) \text{ px}$$

$$\delta\alpha_2 = (161 \pm 2) \text{ px}$$

$$B = (0,8836 \pm 0,0179) \text{ T}$$

Zwischenrechnung zur Kontrolle

$$\mu_{B,trans} = \frac{6,62607 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 0,8836 \text{ T}} \cdot \frac{33}{161} = 7,6801 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

$$\Delta\mu_{B,trans} = \sqrt{(1,6384 \cdot 10^{-28})^2 + (1,5545 \cdot 10^{-25})^2 + (4,6546 \cdot 10^{-25})^2 + (9,5405 \cdot 10^{-26})^2} = 4,9992 \cdot 10^{-25} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Ergebnis (gerundet)

$$\mu_{B,trans} = (7,68 \pm 0,50) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

$$\mu_{B,trans} = 7,68 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} \cdot (1 \pm 6,51\%)$$

Die ermittelten Größen für den longitudinalen Zeeman-Effekt seien (h , c und d sind bekannt)

$$\delta\alpha_1 = (32 \pm 2) \text{ px}$$

$$\delta\alpha_2 = (163 \pm 2) \text{ px}$$

$$B = (0,8803 \pm 0,0178) \text{ T}$$

Zwischenrechnung zur Kontrolle

$$\mu_{B,long} = \frac{6,62607 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 0,8803 \text{ T}} \cdot \frac{32}{163} = 7,3835 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

$$\Delta\mu_{B,long} = \sqrt{(1,5751 \cdot 10^{-28})^2 + (1,4965 \cdot 10^{-25})^2 + (4,6147 \cdot 10^{-25})^2 + (9,0595 \cdot 10^{-26})^2} = 4,9351 \cdot 10^{-25} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Ergebnis (gerundet)

$$\mu_{B,long} = (7,38 \pm 0,49) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

$$\mu_{B,long} = 7,38 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} \cdot (1 \pm 6,64\%)$$

5 Zusammenfassung

Der Wert des Bohrschen Magnetons in transversaler Anordnung $\mu_{B,trans}$ wurde mit

$$\begin{aligned}\mu_{B,trans} &= (7,68 \pm 0,50) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} \\ \mu_{B,trans} &= 7,68 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} \cdot (1 \pm 6,51\%)\end{aligned}$$

berechnet. Für das Bohrsche Magneton in der longitudinalen Anordnung sei

$$\begin{aligned}\mu_{B,long} &= (7,38 \pm 0,49) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} \\ \mu_{B,long} &= 7,38 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} \cdot (1 \pm 6,64\%)\end{aligned}$$

5.1 Diskussion der Ergebnisse

Die Fotoaufnahmen zeigen eine sehr deutliche Aufspaltung der Interferenzringe. Der Zeeman-Effekt war gut beobachtbar.

Auch die Magnetfeldmessung zeigte ein lineares Verhalten von $B(I)$. Erst bei Strömen jenseits von 8 A zeichnet sich eine leichte Abflachung an.

Der Literaturwert für das Bohrsche Magneton μ_B wird von NIST CODATA (Stand 2010) angegeben mit

$$\mu_B = 9,27400968(20) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}.$$

Die relativen Abweichungen der gemessenen Größen zum Literaturwert seien 17.2% für $\mu_{B,trans}$ und 20.4% für $\mu_{B,long}$.

Die Ursachen für diese Abweichungen könnten systematische Fehler im Versuchsaufbau sein.

Das Fabry-Pérot-Interferometers (FPI) war provisorisch mit einer Stativklemme befestigt (Abrutschen nicht ganz ausgeschlossen) und die Digitalkamera wurde mit einer Stativklemme fixiert. Die Digitalkamera bzw. das FPI waren nicht ganz auf der optischen Achse, was auf den Rohbildaufnahmen sichtbar ist. Die Ursache für die Abweichungen vom Literaturwert könnten in einer defekten oder unkalibrierten Hall-Sonde liegen. Da $\mu_B \propto 1/B$ ist, könnte die magnetische Flussdichte in der Realität geringer sein, als es die Messung gemäß Abschnitt 3.1 impliziert.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *[Experimentalphysik]*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin [u.a.], 4., überarb. Aufl. edition, 2010. Auf Haupttitelbl. irrtümlich: Kern-, Teilchen- und Astrophysik.
- [2] Hans-Justus Eifert. *Versuchsanleitung zum Versuch Zeeman-Effekt*, 2010.
- [3] Hans Christoph Haken, Hermann ; Wolf. *Atom- und Quantenphysik : Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen : mit 29 Tabellen*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin [u.a.], 7., aktualisierte und erw. Aufl. edition, 2000. Literaturverz. S. [497] - 502.
- [4] Eugene Hecht. *Optik*. Oldenbourg, München, 5., verb. Aufl. edition, 2009. Literaturverz. S. [1099] - 1105.
- [5] Harry [Hrsg.] Paul, editor. *[Lexikon der Optik]*. Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg [u.a.], 1999.
- [6] Horst [Hrsg.] Stöcker, editor. *Taschenbuch der Physik : Formeln, Tabellen, Übersichten*. Deutsch, Frankfurt am Main, nachdr. der 5., korrigierte Aufl. edition, 2005.
- [7] Gene Tipler, Paul Allen ; Mosca. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg [u.a.], 6. dt. Aufl. edition, 2009. Springer richtet sich nach der Aufl. der engl. Ausg.